拓 撲 空 間 概 論

關 肇 直 編著

科 學 出 版 社

1 9 5 8

內 容 提 要

本書是爲了數學分析方面的青年數學工作者的需要而寫的，主要介紹拓撲空間理論的基礎知識，作爲日後研究現代數學中一些部門（例如汎函分析、概率論等）的準備．敘述方式力求便於剛學過高等學校中數學分析與實變數函數論的人的瞭解．本書內容包括：拓撲結構（鄰域，開集與閉集，定向點列的收斂），連通性，連續映像；連續函數；拓撲空間的各種分離性（(T_0)，(T_1)，(T_2)，(T_3)，(T_4)），全正則拓撲空間；緊性；一致性結構；距離空間，拓撲空間的距離化問題；描述集論大意；拓撲羣的簡單介紹等．讀者對象爲高等學校數學專業高年級學生，青年教師與研究工作者．

拓 撲 空 間 概 論

關 肇 直 編著

*

科 學 出 版 社 出 版（北京朝陽門大街 117 號）

北京市書刊出版業營業許可證出字第 001 號

科學出版社上海印刷廠印刷　新華書店總經售

*

1958年 9 月第 一 版　　書號：1339　字數：263,000

1958年 9 月第一次印刷　　開本：787×1092 1/27

（滬）0001—1,684　　印張：11 11/27

定價：(10)1.80 元

目　　錄

引　言

拓撲空間的理論一方面是由於 19 世紀數學分析奠基工作的需要，另一方面是受了 19 世紀末以來幾何學基礎以及更一般的公理學方法的影響而產生的．到了今日，它基本上是一門完整的科學，並成爲數學中的一個基礎部分，也就是數學中各個部門的共同基礎．本書是爲了適合數學分析工作者的需要，特別是爲了適應汎函分析學者的需要而寫的，對拓撲空間理論的基礎知識作一介紹．

在這裏簡略地敍述一下拓撲空間理論的發展史，似乎是不無幫助的．極限與連續性的概念本是古已有之的，但直到 19 世紀，經過微積分學發現後 200 年來數學科學中大量具體材料的積累，人們才對數學分析的基礎問題開始探究．首先是 Cauchy, Abel 等人對無窮級數與數列的收斂性的研究，然後對於連續函數下了嚴謹的定義．另一方面，Argand 與Gauss 發現了複數的幾何學表示方法（就是現在所謂 Argand 圖，Gauss 平面這一名詞的來源也在這裏），使得複變量的研究得到了幾何學直觀的解釋．Riemann 不僅在數學分析方面作出了重要貢獻，而且他關於幾何學基礎的研究在數學中開闢了嶄新的方向．他特別指出，在關於量的理論中，有一部分是與量測無關的，而這時量不是看成具有與位置無關的存在的，也不是看成可以用一種量測單位表示的，而是看成一個 Mannigfaltigkeit 的部分．他並且指出，在一定的 Mannigfaltigkeit 中決定位置時，不僅有時用有窮多個數值、有時也要求用無窮多個數值，例如在一已知函數集中決定一個函數，或在空間中決定一個幾何圖形等．這裏 Riemann 已經有了函數集的初步觀念[1]．他的這種思想也表現在他關於所謂 Dirichlet 原理的研究中．值得注意，Riemann 也是組合拓撲學的奠定人．但 Riemann

1) 見 Riemann 的論文："Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen"，載在 Riemann 全集俄文本 (Сочинение) 中 279—293 頁．

關於拓撲空間的思想一直要等到實數理論以及直綫、平面與三維空間中點集的研究更系統之後才能獲得進一步的發展．這首先是實數理論的建立，與實變數函數的研究．特別 Georg Cantor 不僅建立了集論，而且他把幾何圖形看成直綫、平面或一般 n 維歐幾里得空間中的點集，並且他第一次定義了積集點、導集、開集、閉集、完集等概念，獲得了關於直綫上這些種點集的結構的重要結果．

Cantor 的思想在法國與德國的函數論學派的研究中得到了發展．例如 Borel, Lebesgue 發現了 n 維歐幾里得空間中有界閉集的緊性（就是現在數學分析教科書中的所謂 Heine–Borel–Lebesgue 定理），而這種思想的發展也被應用到曲綫集與函數集的研究（“正規族”）．這樣，這種思想也密切關聯着汎函分析的早期工作． 1887 年 Volterra 建立了“曲綫的函數”（fonctions de lignes）的概念，給汎函分析樹立了雛型．其後，Hilbert 在 1900 年利用 Riemann 的想法證明 Dirichlet 原理中極小存在［即存在函數 $z=f(x, y)$，使

$$J(f)=\iint\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy$$

爲極小］．他考慮了數學分析中的 Bolzano–Weierstrass 定理對函數集是否成立的問題，即函數集的列緊性問題，而函數集的列緊性問題後來在實變數與複變數函數的研究中都顯示出它的重要性．隨着積分方程的研究出現了與歐幾里得空間類似的無窮維的 Hilbert 空間．這些事實都說明數學分析的研究爲拓撲空間理論的形成準備了大量的具體材料，使得這樣的一般理論的出現成爲既可能又必要．

另一方面，公理學方法的發展使得從這些大量材料中產生一般的抽象理論變成現實．Hilbert 在 1899 年發表的經典性著作“幾何學基礎”（Grundlagen der Geometrie）不僅爲歐幾里得幾何學重新建立了眞正嚴謹的公理系統，而且創立了公理方法，這就是說，在建立一個數學理論時，不必去說明那些基本概念究竟是指什麼，而只須把它們的主要特徵用公理系統描述出來，這樣就使得我們有可能把現實世界中一些量的關係中的次要的、偶然性的屬性捨棄，而把那些最本質的屬

性提出來．也只有這樣才使得數學家們能更有意識地發現現實世界中的各種根本性的量的關係，而不僅僅限於這些量的關係的某些特種表現的研究． 例如在數學分析中有一個熟知定理，即閉有窮區間上的連續函數必達到它的最大最小值，而這一屬性只不過是閉有窮區間滿足 Bolzano–Weierstrass 定理的後果，認淸這點才可以看出本質關係之所在．正是這樣，M. Fréchet (1906) 由數學分析的大量材料中發現了種種不同問題之間的類似，其共同處在於我們研究的都是變元與變元之間的依賴關係，而且在許多定理的證明中，起作用的不是某種特定變元的某種具體性質，而只是很多種不同變元所具有的某種帶根本性質的一般屬性．爲此，Fréchet 創立了廣義分析這一具有高度抽象性的方向，這在一定意義下可以說是數學分析的基礎部分的公理化，這也可以看成是拓撲空間理論正式建立的開始． 這樣，就可以把函數、極限、連續函數等概念中的最本質的部分剖析出來，建立一般變元之間的依賴關係．但我們感覺興趣的，往往並非過於一般的依賴關係，而是連續的依賴關係．這裏所謂連續，粗略地說，是指這依賴關係所關聯着的雙方的一方（主變元）的足够微小的變化可以只引起另一方（從變元）的任意微小的變化． 但在一般的情形下，什麼叫做"微小的變化"呢？ 用幾何學的語言來表達，所謂兩元相差很小，乃是說它們被看作點時是很近的． 因此，在廣義分析中，重要的不是一般的集，而是其上規定了遠近概念的集，就是所謂"空間"． 引用 Fréchet 的話，爲了考慮空間而不是一般的集，必須把集中的元"組織起來"！ 這就是說，必須規定如何判斷在一集中是否有離某元任意近的點．最初，Fréchet 是使用距離來規定遠近的，這也就是對空間中元偶 $\{x,y\}$ 定義的實數值函數 $\rho(x,y)$，滿足一定的條件，於是他提出了距離空間的概念． 但 Fréchet 後來又發現，數學分析中提供了一些例，其中遠近不能用距離來規定，例如 Baire 函數類就是這樣的例，即那裏的函數列收斂不能用"距離趨於零"來表達．爲了建立能包容這些情形的更一般理論，不得不把距離概念歸到更原始的概念，把實數直綫上以一點爲中心的開區間的概念抽象化成鄰域的一般概念．鄰域是比距離更基本的概念．如果對集中每

點都選定一組子集作爲它的鄰域，那末在這集中遠近也就隨着規定了，而所謂一子集包含着"與 a 任意接近"的點，是指這一子集包含 a 的每個鄰域中的點，也就是說，它與 a 的每個鄰域相交．早在 Hilbert 的關於幾何學基礎的著作中就已提出了鄰域概念來給"平面"作公理學的定義．引用他的原話[1]，所謂平面，是指一組元，這些元叫做點，每一點 A 决定一些點的子集，它自己含在每個這樣的子集中，這些子集叫做 A 的鄰域．一個鄰域中的點與數平面(即平常帶有 Descartes 直交坐標的平面)中某 Jordan 區域(即由一個封閉 Jordan 曲綫所圍繞的區域的內部)中的點之間成立一一對應．這 Jordan 區域叫做那個鄰域的像．在一個像中的、包含點 A 於其內部的 Jordan 區域仍是 A 的一個鄰域的像．如果一個鄰域有兩個像，那末，藉那個鄰域引起的二像之間的一對一映像是雙方連續的．如果 B 是 A 的一個鄰域中的某點，那末這鄰域也是 B 的一個鄰域．對於 A 點的兩個鄰域，恆有 A 的一個鄰域同時包含在那兩個鄰域之中．如果 A、B 是平面上任意兩點，那末 A 必有一鄰域同時也包含 B．有趣的乃是 Hilbert 的這一公理系統已與現在用鄰域規定拓撲結構的定義很接近了．當然，必須拋棄某些不必要的具體限制．Fréchet 開始考慮用鄰域定義空間，是在 1913 年，而在大約同時，有些別的數學家也作過類似的考慮，特別是 Hausdorff 在 1914 年出版的書 Grundzüge der Mengenlehre (第一版) 中利用了開鄰域定義我們現在所謂 (T_2) 型空間．F. Riesz 也是拓撲空間理論的奠基人之一，他主要是從導集概念出發．Hausdorff 以後，拓撲空間的理論逐漸定形下來．其後的很多重要工作是屬於蘇聯莫斯科學派的，特別是 П. С. Александров 與 П. С. Урысон．如果 Fréchet 是最早看出列緊性與緊性的密切關係的人，那末緊空間的系統研究却是屬於 Александров 與 Урысон 的．他們還在距離化問題——即尋求一個拓撲空間的拓撲結構可以由一距離規定的條件——方面作出

1) Über die Grundlage der Geometrie, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1902), 233—241, 也可參看 Hilbert 的專書 Grundlagen der Geometrie, 第 7 版的附錄 4．

了卓越貢獻,近年來這問題在 Ю. М. Смирнов 手中已經基本上完全解決。 Тихонов 對於緊空間的積空間的緊性的證明(1930)也是這一學派的重要貢獻.

本世紀三十年代以後法國數學家又在拓撲空間方面作出了新貢獻. Henri Cartan 在 1937 引進了 filtre 的概念,使得"收斂"的更本質的屬性顯示出來。 鄰域只能表達出一個點在某點附近,不適於表達出兩點"相互很近",數學分析中一致連續性的研究却需要後者,於是 A. Weil 在 1937 提出了一致性結構的概念,這在一定意義下乃是距離空間的推廣,或更恰當地說,一致性結構乃是反映了距離空間的一些本質屬性. 因為過去對於距離空間證明的不少定理實際上與距離的選取或甚至它的存在都沒有關係,只是一致性結構的後果. Fréchet 後來又提出抽象距(1945)的概念,他的學生們進行了完整的研究,指出了當抽象距滿足一定條件時就確眞得出 A. Weil 的一致性結構來. 蘇聯學派近年來又提出了近性空間(пространство близости)的概念.

拓撲空間與代數的一些概念結合起來,就變得更豐富,並有更多應用. 特別是拓撲羣與拓撲綫性空間,近年來都已發展成數學中獨立的分支.

本書只對於拓撲空間作一基礎性介紹. 特別,由於這本書是以數學分析的工作者作讀者對象的,即目的在於使一般在高等學校數學專業畢業的青年通過本書可以獲得關於拓撲空間理論的基礎知識,以為學習汎函分析打下基礎,我們在書的內容與敍述方式的選擇方面,都是根據這一目的來決定的. 特別,我們不追求從拓撲空間理論本身看公理系統的最簡單或美觀(如很多書從 O_1—O_2 出發),也不追求純拓撲的特徵(如避免實値連續函數等外來的工具等). 相反地,我們儘可能遵循一般實變數函數論中敍述數直綫或 n 維歐幾里得空間中的拓撲性質的方式,例如像 Натансон 的實變數函數論中的敍述方式,以便使初學的青年易於和在高等學校中讀實變數函數論等課所獲得的知識比較,使得他們對那些抽象概念的引入不至感覺突然. 為此,我們從鄰域組出發定義拓撲空間,並常常使用半序點列的收斂(在一些文獻上稱作

Moore-Smith-Шатуновский 收斂)，而在開始時並不引入從理論上看更好的 filtre 概念．我們也常常使用實數，特別是空間上的實值連續函數作爲輔助工具．但爲了使讀者不與現代一般的拓撲空間理論的敍述形式脫節，我們在書中也介紹了那些陳述形式，並證明這種形式與書中者的邏輯等價．

除一般的拓撲空間理論的內容以外，爲了學習汎函分析的需要，我們在這裏還添加一些有關材料．特別，爲了閱讀像 Banach 的 Théorie des opérations linéaires 一類經典著作，我們將介紹一些平常往往歸到"描述集論"方面的初步知識——第一綱集，Baire 屬性，Baire 函數類，Borel 函數類等等．我們也介紹一點有關拓撲羣與拓撲綫性空間的基本概念，這僅僅爲了使讀者在這樣基礎上能對 Banach 空間理論獲得更好的理解，而這些方面的較深刻的知識則應當是其它專門書的事情了．

本書的編寫基本上是在 1950—1951 年完成的，當時主要的參考材料是 N. Bourbaki 那部名著 Topologie générale，不過敍述方式很不同．近年來，更多的專書出版了，特別是 J. L. Kelley 的 General topology (1955)，無論在編書的目的方面或在敍述方式上，都與我們所採取的相類似．這使得著者懷疑還有沒有出版本書的必要．但鑒於目前我國數學方面專書非常缺乏，而且外國文對於一般青年讀者也不是容易的，於是仍決定把它出版．假如它還能完成一定的使命，總算著者的冒昧還有一點好的效果吧！ 由於著者的淺薄，不敢保證書中沒有錯誤，至於缺點，恐怕更不少，希望海內的學者不吝賜敎．

關 肇 直

1956 年 12 月 · 北京

關於集論的若干準備知識

本書假定集論的知識爲已知．由於 П. С. Александров 著的 Введение в общую теорию множеств и функций 的漢譯本[1] 已經出版，這樣的要求對於我國的一般讀者來說，似乎不算過份．但爲了使讀者易於查找，也由於使用名詞與符號的不同，我們在這裏再把集論的一些基本概念作一簡述．特别對於 П. С. Александров 書中所缺少的，而又爲本書後面所要用到的材料，則不得不敍述一下．我們並不打算深入集論的細節，特别不打算在本書中涉及集論基礎中的一些問題，而是像一般數學書那樣，採取所謂“樸質”的觀點，對於集論的一般結果都加以承認．特别在本書中經常使用選擇公理及與它等價的 Zorn 輔助定理，而對於在哪裏確實使用了它或哪裏可以避免使用它，將不作任何聲明．

爲了在全書中節省書寫，我們常引用一些符號．如果 P, Q 表示兩個命題，那末我們用 $P \Longrightarrow Q$ 表示：由命題 P 可以推演出命題 Q 來，而 $P \Longleftrightarrow Q$ 則表示兩命題 P, Q 是等價的，即由 P 可以推演出 Q 來，而由 Q 也可以推演出 P 來．我們在這時也說：爲了 P 眞，必須且只須 Q 眞．我們常用符號 $\exists$ 表示“存在”，用 $\equiv$ 表示它所聯結的兩邊按定義是相同的．

一．集代數

集由元組成，爲了明確集的概念，我們必須有一定的準則來判斷那些事物是這個集的元，那些不是它的元，從而集是由它的元的一個特徵性質來決定的．我們用大寫羅馬字母 A, B, … 等表示集，用小寫羅馬字母 a, b, c, …, x, y, z,… 表示集中的元．我們用

$$a \in A \tag{1}$$

1) 楊永芳譯，集與函數的汎論初階，高等教育出版社．

表示下列命題：a 是 A 中的元，讀成"a 包含在 A 中"。我們也把(1)表示成

$$A \ni a,$$

讀成"A 包含元 a"。用符號

$$a \notin A, \text{ 或 } A \not\ni a$$

表示下列命題：a 不包含在 A 中，或 a 不是 A 的元。

如果集 A 中的元都是集 B 中的元，即對於每個元 x，

$$x \in A \Longrightarrow x \in B,$$

那末我們說 B 包含 A，A 包含在 B 中或 A 是 B 的子集，用符號

$$A \subset B, \text{ 或 } B \supset A$$

表示。注意：$\subset$ 表示集與集之間的關係，而 $\in$ 表示元與集之間的關係，從而 $\subset$ 與 $\in$ 是表示兩個完全不同的概念，不可混淆。但如果

$$a \in A,$$

那末由 a 一個單獨元組成的集，通常用 $\{a\}$ 表示，必是 A 的子集[1]：

$$\{a\} \subset A.$$

我們常用固定的符號表示數學中常見的幾個集。例如用 N 表示自然數的全體，Z 表示整數全體，Q 表示有理數全體，R 表示實數全體，C 表示複數全體，等等。

符號 $\subset$ 所反映的關係叫做包含關係。這個關係滿足下列三個條件：

1) $A \subset A$;

2) $A \subset B$ 且 $B \subset A \Longrightarrow A = B$，即 A 與 B 由同樣的元組成；

3) $A \subset B$ 且 $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

不含任何元的集叫做空集，表示成

$$\phi.$$

我們規定，ϕ 包含在任意集 A 中：

$$\phi \subset A.$$

在許多數學問題中，常以某一個集 E 作考慮問題的出發點，而所考

1) 有些作者，例如波蘭數學家們常對這兩符號不加區分。

慮的元都是這個集的元，所考慮的集都是這個集的子集。我們常根據 E 中元的某一性質來界定 E 的子集。例如，以實數全體 R 作考慮問題的出發點，那末根據"大於 5"這一性質，就可以在 R 中界定出一個子集來，即由 R 中一切大於 5 的數組成。E 中元的一個性質往往由一個命題 $P(x)$ 決定：$P(x)$ 表示元 x 具有由命題 P 敍述的那個性質。這時，由這性質界定的子集用下列符號表示：

$$\{x|x\in E,\ P(x)\}.$$

例如上面說的那個大於 5 的實數所組成的集用下列符號表示：

$$\{x|x\in R,\ x>5\}.$$

這樣，不難看出，

$$P(a)\Longleftrightarrow a\in\{x|x\in E,\ P(x)\}.$$

集 E 的一切子集(包括 E 自己與空集 ϕ)全體用

$$\mathfrak{P}(E)$$

表示。這種由集組成的集（即一個集，它的元本身是集）叫做集族。$\mathfrak{P}(E)$ 是一個特殊的集族。一般的集族常用符號

$$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$$

表示，這裏 A_ι 是集，I 是一個標號族，其中元 ι 都是標號。I 的勢可能是有窮，可數或不可數無窮。對於只含有窮多個集的集族，我們可以取 I 為自然數集 N 的一個子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$，而這集族表示成

$$\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

如果族中恰含可數多個集，那末用自然數集 N 作標號族 I：

$$\{A_i\}_{i\in N}\ \text{或}\ \{A_i\}_{i=1,2,\cdots}.$$

所謂集族 $\{A_\iota\}_{\iota\in I}$ 中諸集 A_ι 的併集(簡稱併)，是指由至少包含在一個 $A_\iota(\iota\in I)$ 中的元組成的集，我們用

$$\bigcup_{\iota\in I}A_\iota$$

表示。如果 $I\subset N$，那末併集可用下列符號表示：

$$\bigcup_{i\in N}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots;$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

所謂集族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$中的諸集A_ι的交集（簡稱交），是指由包含在一切A_ι中($\iota\in I$)的元所組成的集，我們用

$$\bigcap_{\iota\in I} A_\iota$$

表示。當$I\subset N$時，我們用下列符號表示交集：

$$\bigcap_{i\in N} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots;$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} A_i = A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

如果

$$\bigcap_{\iota\in I} A_\iota = \phi,$$

我們說諸集A_ι($\iota\in I$)沒有公共點，或不相交。而一般交集$\bigcap_{\iota\in I} A_\iota$也叫做諸集$A_\iota$的公共部分。如果在集族$\{A_\iota\}_{\iota\in I}$中，每兩個$A_\iota$不相交，即

$$\iota, K\in I,\ \iota\neq K \Longrightarrow A_\iota\cap A_K = \phi,$$

那末我們說這族中的集兩兩不相交。

所謂集A與集B的差集，是指A中一切不包含在B中的元所組成的集，用

$$A\setminus B$$

表示，即

$$A\setminus B \equiv \{x\,|\,x\in A,\ x\notin B\}.$$

這時，我們不必限制B是A的子集。不難看出，爲了$A\subset B$，必須且只須$A\setminus B=\phi$。如果在某問題中所考慮的集都是某集E的子集，那末差集

$$E\setminus A \qquad (A\subset E)$$

常表示成

$$CA \quad 或 \quad C_E A,$$

叫做A(相對於E)的補集。不難看出

$$CE=\phi,\quad C\phi=E,\quad C(CA)=A.$$

不難驗明，上面定義的那些關於集的運算，下列諸關係成立（設所考慮的諸集 A, B, … 等都是一個固定集 E 的子集）：

$$A\cup A=A,\qquad A\cap A=A;$$
$$A\cup CA=E,\qquad A\cap CA=\phi;$$
$$A\cup\phi=A,\qquad A\cap E=A;$$
$$A\cup E=E,\qquad A\cap\phi=\phi;$$
$$A\cup B=B\cup A,\qquad A\cap B=B\cap A;$$

$A\subset A\cup B$, $B\subset A\cup B$, 而且

$$A\subset C,\ B\subset C\Longrightarrow A\cup B\subset C;$$

$A\supset A\cap B$, $B\supset A\cap B$, 而且

$$A\supset C,\ B\supset C\Longrightarrow A\cap B\supset C;$$

$$C(A\cup B)=CA\cap CB,\quad C(A\cap B)=CA\cup CB;$$

更一般：

$$C\bigcup_{\iota\in I}A_\iota=\bigcap_{\iota\in I}CA_\iota,\quad C\bigcap_{\iota\in I}A_\iota=\bigcup_{\iota\in I}CA_\iota.$$

這最後一式以及下面很多公式表明了集論中的對偶性原則，即在集的關係中，如果把每個集換成它的補集，而把 $\cup$ 與 $\cap$ 對換，那末得出來的新關係仍成立！又

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

更一般些，

$$\bigcup_{\substack{\iota\in\cup J_\lambda\\ \lambda\in L}}A_\iota=\bigcup_{\lambda\in L}\Big(\bigcup_{\iota\in J_\lambda}A_\iota\Big),\quad \bigcap_{\substack{\iota\in\cup J_\lambda\\ \lambda\in L}}A_\iota=\bigcap_{\lambda\in L}\Big(\bigcap_{\iota\in J_\lambda}A_\iota\Big);$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

更一般些，

$$\Big(\bigcup_{\iota\in I}A_\iota\Big)\cap\Big(\bigcup_{\kappa\in K}B_\kappa\Big)=\bigcup_{\substack{\iota\in I\\ \kappa\in K}}(A_\iota\cup B_\kappa);$$

$$\Big(\bigcap_{\iota\in I}A_\iota\Big)\cup\Big(\bigcap_{\kappa\in K}B_\kappa\Big)=\bigcap_{\substack{\iota\in I\\ \kappa\in K}}(A_\iota\cup B_\kappa).$$

$$A \subset B \Longleftrightarrow CA \supset CB \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A;$$

$$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow A \subset CB \Longleftrightarrow B \subset CA;$$

$$A \cup B = E \Longleftrightarrow CA \subset B \Longleftrightarrow CB \subset A.$$

上面已經談到，由一個元 a 組成的集用$\{a\}$表示(稱做單點集)。一般，由有窮多或可數無窮多元 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 所組成的集各用符號

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \text{ 及 } \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

表示(各相應地稱做有窮集與可數無窮集)。

二．映　像

如果有兩個集E與F，對於每個 $x \in E$，有一定規律使我們找到一個元 $y \in F$ 與 x 相應，這規律叫做由E到F中的映像，平常表示成

$$x \longrightarrow f(x) = y \quad (x \in E, f(x) \in F),$$

或簡單地用 f 表示這映像．有時只對E的某子集A中的元x，有 $y \in F$ 與它相應，那末我們說映像 f 定義在E的子集A上，A叫做 f 的定義域；我們也說，f 把集 A 映入 F．$f(x)$叫做元 x 按照映像 f 在集F中的像．F 中凡作爲 A 中某元 x 的像的全體 (表示成 $f(A)$，即 $f(A) = \{y \mid \exists\, x \in A, f(x) = y, y \in F\}$) 叫做映像 f 的値域．一般，對於E的任意子集 B，令

$$f(B) = \{f(x) \mid x \in B\},$$

則 $f(B)$是F中的子集，叫做B按映像 f 在F中的像。

如果特別F是數集(例如 $F = R$ 或 $F = C$)，那末由E到F中的映像一般叫做E上的函數[1]．

由E到F中的一切映像的全體表示成

$$F^E.$$

平常在數學分析中考慮的“函數”乃是 R^R 中的元，而在複變數函數論中所遇到的乃是 C^C 中的元．如果 $F = E$，那末由E到E中的映像也簡稱作E中的映像．

如果映像 f 滿足 $f(E) = F$，那末F中每個元必是E中某元按映像

1) 在早期文獻中叫做汎函數，在現代汎函分析中仍這樣用這一名詞．

f 的像元，這時我們說 f 是由 E 到 F 上的映像．如果 $F=E$，而映像

$$f \in E^E$$

有下列性質：對於每個 $x \in E$, $f(x)=x$，那末 f 叫做 E 中的不變映像，因爲它把 E 中每個元映成它自己．一般，如果

$$f \in E^E,$$

關係 $f(x)=x$ 不一定對於每個 $x \in E$ 成立；這時，使這關係成立的元 x 叫做映像 f 下的不動元．

如果

$$f \in F^E,$$

那末對於每個 $A \in \mathfrak{P}(E)$（即 $A \subset E$），

$$f(A) \equiv \{f(x) \mid x \in A\} \in \mathfrak{P}(F) \ (\text{即 } f(A) \subset F),$$

從而 f 也可以看成是由 $\mathfrak{P}(E)$ 到 $\mathfrak{P}(F)$ 中的映像，這個映像叫做 f 在 E 的子集族上的延拓．注意下列關係一般成立（A, B 表示 E 的子集）：

$$A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B);$$

$$A \neq \phi \Longleftrightarrow f(A) \neq \phi;$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B),$$

$$f\Big(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\Big) = \bigcup_{\iota \in I} f(A_\iota).$$

注意一般不必

$$f(A) \subset f(B) \Longrightarrow A \subset B,$$

因爲當 f 把 E 中每個元映成 F 中一個固定元 a 時，那末 $f(A)=f(B)=$ $=\{a\}$，但 $A \subset B$ 不必成立．又注意

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

也不必成立，因爲如果 E 至少含兩元，而 f 把 E 中每個元映成 F 中一個固定元 a，並取 A, $B \subset E$，使 $A \cap B = \phi$，那末

$$f(A \cap B) = f(\phi) = \phi \neq f(A) \cap f(B) = \{a\}.$$

如果 $f \in F^E$，而 $M \subset F$，集

$$\{x \mid x \in E, f(x) \in M\}$$

叫做集 M 在映像 f 之下的原像，用符號

$$\overset{-1}{f}(M)$$

表示．如果M只含一個元：$M=\{y\}$，那末也用

$$\overset{-1}{f}(y)$$

代替

$$\overset{-1}{f}(\{y\}).$$

如果對於每個 $y\in f(E)$，$\overset{-1}{f}(y)$ 是E中只由一個元所組成的集，那末我們說 f 是由E到F中的一對一映像．如果有一個由E到F上的一對一映像 f，即存在 $f\in F^E$，而 f 是一對一映像，且 $f(E)=F$，那末E與F叫做等勢集．當 f 是由E到F中的一對一映像時，$\overset{-1}{f}$也是由 $f(E)$到E上的映像（即對於每個元 $y\in f(E)$，必有E中一元 $\overset{-1}{f}(y)$ 與 y 相應）；這時 $\overset{-1}{f}$：$y\to\overset{-1}{f}(y)$叫做映像 f 的逆映像．注意 $\overset{-1}{f}\in E^F$．

一般，對於任意映像 $f\in F^E$，如果 A，$B\subset E$，必然

$$\overset{-1}{f}(A\cup B)=\overset{-1}{f}(A)\cup\overset{-1}{f}(B),\quad \overset{-1}{f}(A\cap B)=\overset{-1}{f}(A)\cap\overset{-1}{f}(B),$$

$$\overset{-1}{f}(CA)=C\overset{-1}{f}(A),$$

$$\overset{-1}{f}\Big(\bigcap_{\iota\in J}X_\iota\Big)=\bigcap_{\iota\in J}\overset{-1}{f}(X_\iota),\quad \overset{-1}{f}\Big(\bigcup_{\iota\in J}X_\iota\Big)=\bigcup_{\iota\in J}\overset{-1}{f}(X_\iota).$$

注意

$$f(\overset{-1}{f}(A))=A,$$

但一般

$$\overset{-1}{f}(f(A))\supset A,$$

而不一定 $\overset{-1}{f}(f(A))=A$．例如設E含兩個以上元，而 f 把E中每個元映成F中一個固定元 a，那末取 $A=\{b\}\subset E$，則 $f(\{b\})=\{a\}$，但

$$\overset{-1}{f}(f(\{b\}))=\overset{-1}{f}(\{a\})=E\neq\{b\}.$$

如果 $f\in F^E$，而 A是E的子集，那末把A中各個元 x 各映成 $f(x)\in F$ 的映像，叫做映像 f 在E的子集A上的限制．反之，如果 $A\subset E$，而 $f\in F^A$，並且設能找到一個 $\varphi\in F^E$，使對於每個 $x\in A$，$\varphi(x)=f(x)$，那末 φ 叫做 f 在E上的延拓．

如果 f 是由E到F上的映像，而 g 是由F到G中的映像，那末 $z=$

$= g(f(x))$ 決定一個由 E 到 G 中的映像 φ，我們寫成 $\varphi = g \circ f$，φ 叫做 f 與 g 的複合映像．注意如果 f 與 g 都是一對一的映像時，$g \circ f$ 也是，並且

$$\overset{-1}{\overbrace{(g \circ f)}} = \overset{-1}{f} \circ \overset{-1}{g}.$$

三．積　集

設有一族集 $\{E_\iota\}_{\iota \in I}$．凡形狀如

$$(x_\iota)_{\iota \in I} \quad (x_\iota \in E_\iota,\ \iota \in I)$$

的元的全體組成的集 E 叫做諸集 $E_\iota(\iota \in I)$ 的積集，而每個 E_ι 叫做 E 的因子集．這個關係表示成

$$E = \prod_{\iota \in I} E_\iota.$$

實際上，$(x_\iota)_{\iota \in I}$ 被看作一個元，其"ι-坐標"是 E_ι 中的元．由 E 到 E_{ι_0} 上的映像

$$(x_\iota)_{\iota \in I} \longrightarrow x_{\iota_0} \quad (\iota_0 \in I)$$

叫做 E 在 E_{ι_0} 上的投影；更一般地說，如果 J 是 I 的子集，那末

$$(x_\iota)_{\iota \in I} \longrightarrow (x_\iota)_{\iota \in J}$$

是由

$$E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$$

到

$$E_J \equiv \prod_{\iota \in J} E_\iota$$

上的映像，叫做由 E 到 E_J 上的投影．

最常用的是兩個集 E 與 F 的積集，表示成 $E \times F$，即一切元序偶 (x, y) 的全體，這裏 $x \in E$，$y \in F$．如果 $y = f(x)$ 是由 E 到 F 中的映像，那末 $E \times F$ 中的集

$$\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

叫做映像 f 的圖像．如果 $E = F = R$，那末這裏的圖像實際上就是平

常解析幾何學中所考察的表示函數 f 的曲綫.

如果在積集 $\prod_{\iota\in I} E_\iota$ 中,各個 E_ι 都彼此相等:

$$E_\iota = E_0 \quad (\iota \in I),$$

那末積集 $E = \prod_{\iota\in I} E_\iota$ 叫做 E_0 的冪集,表示成

$$E = E_0^I,$$

而冪集實際上可以看成是由標號族 I 到集 E_0 中的一切映像的全體.

在 $E\times E$ 中,集

$$\{(x, x)|x\in E\}$$

叫做冪集 $E\times E = E^2$ 的對角綫集,平常用 $\varDelta$ 表示.

如果 $A\subset E\times F$, $B\subset F\times G$, 那末規定

$$A\circ B = \{(x, z)|\exists y\in F,\ (x, y)\in A,\ (y, z)\in B\},$$

$B\circ A$ 是 $E\times G$ 的子集、叫做 A 與 B 的複合集. 注意,一般

$$B\circ A \neq A\circ B.$$

如果 $C\subset E\times F$, 規定

$$\overset{-1}{C} = \{(y,x)|x\in E, y\in F, (x, y)\in C\}.$$

如果特別 $E = F$, 而 $C = \overset{-1}{C}$, 那末 C 叫做對稱的. 不難看出:

$$\overset{-1}{(\widehat{B\circ A})} = \overset{-1}{A}\circ\overset{-1}{B}.$$

四. 等價關係

設 E 是一集,所謂 E 的分割,是指 E 的一族子集 $\{A_\iota\}_{\iota\in I}$, 諸集 A_ι 兩兩不相交,並且

$$\bigcup_{\iota\in I} A_\iota = E.$$

今定義關係 $\Re$ 如下:所謂 $x\Re y$ (即 x 與 y 有關係 $\Re$), 是指

$$\exists\iota\in I,\ 使\ x\in A_\iota\ 且\ y\in A_\iota.$$

這樣定義的 $\Re$ 是一等價關係,換句話說,它滿足下列三個條件:

1) $x\Re x$ (自反性);

2) $x\mathfrak{R}y \Longrightarrow y\mathfrak{R}x$ (對稱性);

3) $x\mathfrak{R}y$ 且 $y\mathfrak{R}z \Longrightarrow x\mathfrak{R}z$ (傳遞性).

用 $E\times E$ 中的子集來表達,令

$$C = \{(x, y) | x, y \in E, x\mathfrak{R}y\},$$

那末上面三個條件各等價於下列三個條件:

1') $\Delta \subset C$;

2') $\overset{-1}{C} = C$;

3') $C \circ C \subset C$.

反之,設 $\mathfrak{R}$ 是集 E 中元之間的一個等價關係,對於每個 $a \in E$,令

$$A_a = \{x | x \in E, x\mathfrak{R}a\},$$

那末對於不同的 $a, b \in E$, A_a 與 A_b 或者相同,或不相交,而諸 A_a 之併就是 E. 所以這些互不相同的 A_a 形成 E 的分割.

$$a \longrightarrow A_a$$

是由 E 到 $\mathfrak{P}(E)$ 中的映像,如果把這映像表示成 $f_{\mathfrak{R}}$,那末 $f_{\mathfrak{R}}(E)$ 是 $\mathfrak{P}(E)$ 的子集,表示成 $E/\mathfrak{R}$,叫做集 E 對等價關係 $\mathfrak{R}$ 的商集. $f_{\mathfrak{R}}$ 叫做由 E 到 $E/\mathfrak{R}$ 上的典範映像. E 的子集 A 叫做按等價關係 $\mathfrak{R}$ 飽和的,是指

$$a \in A \Longrightarrow A_a \subset A.$$

A_a 也叫做含 a 的等價類. 飽和集是某些等價類的併集. 集

$$\overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(f_{\mathfrak{R}}(A))$$

是含集 A 的最小飽和集.

五. 序 集

集 E 中元之間的關係 $\mathfrak{R}$ 叫做序關係,是指它滿足下列三條件:

1) $x\mathfrak{R}x$ (自反性);

2) $x\mathfrak{R}y$ 且 $y\mathfrak{R}x \Longrightarrow x = y$ (反對稱性);

3) $x\mathfrak{R}y$ 且 $y\mathfrak{R}z \Longrightarrow x\mathfrak{R}z$ (傳遞性).

序關係一般表示成 $\geqslant$ 或 $\succ$ (各讀如"大於或等於"與"跟隨"). 如果

$$x \geqslant y \quad \text{而} \quad x \neq y,$$

我們說"x 大於 y"或"y 小於 x",表示成 $x > y$. 帶有序關係的集叫做序集. 如果序關係 $\geqslant$ 還滿足

4) 對於每兩個元 $x, y \in E$, 下面兩個關係至少有一個成立:

$$x \geqslant y, \quad y \geqslant x,$$

那末這個序關係叫做全序關係,而序集 E 叫做全序集. 爲了與全序集區別,不滿足 4)的序集叫做半序集. 我們也用 $x \leqslant y$ 表示 $y \geqslant x$. 如果 $\geqslant$ 是序關係,那末 $\leqslant$ 也是序關係,叫做原來序關係 $\geqslant$ 的對偶關係. 在一序集中, 凡形如 $\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$ (或 $\{x|a < x < b\}$) 的子集叫做閉 (開) 區間, 表示成 $[a, b]$ (或 $]a, b[$). $]a, b]$ 則表示半開區間 $\{x|a < x \leqslant b\}$. 子集 $\{x|x \leqslant b\}$(子集 $\{x|x \geqslant a\}$)則表示成$]\leftarrow, b]$. ($[a, \rightarrow[$).

如果 E 是序集, A 是 E 的子集,而有一元 a, 使

$$x \in A \Longrightarrow x \leqslant a \ (x \geqslant a),$$

那末 A 叫做上圍(下圍)的,而 a 叫做 A 的上界(下界). 如果 a 是 A 的上界(下界),而且對於 A 的每個上界(下界) z, 必然 $a \leqslant z (a \geqslant z)$, 那末 a 叫做 A 的上確界或上端(下確界或下端). 如果上(下)端存在,它必是一意的.

如果序集 E 的子集 A 包含它的一個上界 (下界) a, 那末 a 叫做 A 的最大元(最小元). 這時 a 也是 A 的上端(下端).

如果在序集 E 的子集 A 中, 有一元 $a \in A$, 使 A 中沒有元 z 能滿足 $z > a$ ($< a$), 那末 a 叫做 A 中的極大(極小)元. 最大(最小)元必是極大(極小)元,但逆命題一般不眞;但在全序的情形是眞的.

如果序集 E 中每兩個元所組成的集有上端,也有下端,那末 E 叫做絡(或格). 在絡中, x, y 的上端(下端)表示成 $x \vee y$ ($x \wedge y$).

更一般些,如果 E 是序集, 而對於 E 中任意兩元 x, y, 必存在一元 $z \in E$, 使

$$z \geqslant x, z \geqslant y \quad (z \leqslant x, z \leqslant y),$$

那末 E 叫做按序關係 $\geqslant$ ($\leqslant$)的定向集[1].

1) 有時考慮定向集時,往往不必假定"$a \geqslant b$ 且 $b \geqslant a \Longrightarrow a = b$"這一條件.

如果在一絡E中，凡可數集有上端與下端，這個絡叫做σ備的. 如果在絡E中，凡子集有上、下端，這個絡叫做備的. 在絡E中，$\vee$與$\wedge$可以看成運算，它們滿足下列規律($a, b, c \in E$)：

$$a \vee a = a, \qquad a \wedge a = a; \qquad \text{(冪等律)}$$

$$a \vee b = b \vee a, \qquad a \wedge b = b \wedge a; \text{(交換律)}$$

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c); \quad \text{(結合律)}$$

$$a \vee (b \wedge a) = a, \quad a \wedge (b \vee a) = a \text{ (吸收律)}.$$

這樣，絡也可以看成一種代數結構.

如果在絡E中，對於任意元a, b, c,

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

常成立，E叫做分配絡. 在分配絡E中，如果有最大元I與最小元O，並且對於每個元$a \in E$，存在一元$a' \in E$，滿足

$$a \vee a' = I, \quad a \wedge a' = O, \tag{1}$$

那末E叫做 Boole 代數. 在 Boole 代數中，按照(1)與元a相應的元a'叫做a的補元；補元是一意確定的，即$a \to a'$是由E到E上的一對一映像，並且滿足($x, y \in E$)：

$$(x \wedge y)' = x' \vee y', \quad (x \vee y)' = x' \wedge y';$$

$$(x')' = x.$$

在 Boole 代數中，如果有一命題成立，那末把命題中的元x各換成其補元，並相應地把$\vee$與$\wedge$對調，所得的命題仍成立，這一原理叫做對偶性原則.

對於任意集 A, A 的一切子集組成的集族$\mathfrak{P}(A)$按集的運算"併$\cup$"與"交$\cap$"(各代替$\vee$與$\wedge$)形成一 Boole 代數，而$B \in \mathfrak{P}(A)$的補元實際就是B在A中的補集CB(這裏I即集A，O即空集ϕ). 反之，任意 Boole 代數必同構於某個$\mathfrak{P}(A)$的子族，這裏同構是指保持$\vee$與$\wedge$的一對一映像.

Boole 代數E中的子集J叫做幻(或理想集)，是指

$$x,\ y \in J \Longrightarrow x \vee y \in J,\quad x \in J \text{ 且 } y \leqslant x \Longrightarrow y \in J.$$

如把$\vee$與$\wedge$互調，$\leqslant$ 換成 $\geqslant$，則 J 叫做對偶幻(或對偶理想集)．E中子集 $\{x \mid x \leqslant a,\ x \in E\}$ 也是幻，叫做由元 a 生成的主幻；集 $\{x \mid x \geqslant a,\ x \in E\}$ 叫做由 a 生成的主對偶幻．如果在 σ 備 Boole 代數中，幻 J 有下列性質：即 $x_n \in J(n=1,2,\cdots) \Longrightarrow \bigvee_{n=1}^{\infty} x_n \in J$，那末 J 叫做 σ-幻．

全序集叫做良序的，是指這集的每個不空子集必有最小元．這裏不去枚舉關於良序集以及超窮數理論中的結果[1]．我們只舉出很有用的超窮歸納法的原理來：設 $T(\alpha)$是關於序數 α 的命題；如果 $T(\alpha_0)$真，並且當對於一切滿足 $\alpha_0 \leqslant \alpha < \beta$ 的序數 α，$T(\alpha)$真時，$T(\beta)$也眞，那末 $T(\alpha)$對於一切序數 $\alpha \geqslant \alpha_0$ 眞．

我們在本書中承認**選擇公理**[2]：設 $\mathfrak{M} = \{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族兩兩不相交的非空集，那末必存在一集 $E \subset \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$，使得每個 $E \cap E_\alpha (\alpha \in I)$恰含一個元．

由此可以推出所謂 Zermelo **定理**：在每個集上可以引入一個良序關係，使得這個集成爲良序集．

由選擇公理還可以推出**廣義選擇公理**[3]：對於每一集族 $\mathfrak{T} = \{T_\iota\}_{\iota \in I}$，如果每個 $T_\iota \neq \phi$，那末存在一個由 $\mathfrak{T}$ 到 $\bigcup_{\iota \in I} T_\iota$ 中的映像 g，使 $g(T_\iota) \in T_\iota (\iota \in I)$．

在應用時，一個與選擇公理等價的命題，即所謂 Zorn 輔助定理，比選擇公理本身更方便．由於這兩命題的等價性的證明，在一般目前流行的書(漢語寫的或譯本)中都沒有，我們在下面簡略地給出這個證明來[4]．

Zorn 輔助定理． 設 E 是不空序集，而 E 的每個全序子集在 E 中有

1) 見 П. С. Александров, 集與函數的汎論初階，第三章或 И. П. Натансон, 實變數函數論第14章．

2) П. С. Александров, 集與函數的汎論初階，第三章 §4．

3) 同上書第三章 §5．

4) Hermes, Verbandstheorie, 第五章 §25，也請參看 K. Kuratowski i A. Mostowski, Teoria Mnogości, 1952.

上端，那末E必至少有一極大元.

證. 姑且設E是不空序集，其中無極大元，但其中每個不空全序子集K有一上端 $\sup K \equiv g(K)$. 對於每個 $x \in E$, 令

$$S(x) = \{y \mid y \in E,\ y > x\},$$

而令

$$\mathfrak{s} = \{S(x) \ x \in E\}.$$

依廣義選擇公理，存在$\mathfrak{s}$上一個映像 φ，使 $\varphi(S(x)) \in S(x)$. 令 $f(x) = \varphi(S(x))$, 於是

$$x < f(x) \qquad (x \in E). \tag{2}$$

既然$E \neq \Phi$，固定E中某元a_0. 今將E的子集Z叫做 Zorn 集，是指它滿足下列三個條件：

(i) $a_0 \in Z$; (ii) $x \in Z \Longrightarrow f(x) \in Z \quad (x \in E)$;

(iii) 如K是E中不空全序子集，而$K \subset Z$, 那末 $g(K) \in Z$.

整個集E以及集 $\{x \mid x \in E,\ x \geqslant a_0\}$ 都是 Zorn 集. 一切 Zorn 集的交仍是 Zorn 集，表示成 Z_0. 這個 Z_0 是最小的 Zorn 集，即每個 Zorn 集必包含它. 特別 Z_0 中的元必都 $\geqslant a_0$. 如果我們能證明 Z_0 為全序子集，那末，既然 $a_0 \in Z_0$, Z_0 是不空的，從而依(iii) $g(Z_0) \in Z_0$, 而 $g(Z_0)$ 顯然為 Z_0 的最大元. 但依(ii)，$f(g(Z_0)) \in Z_0$ 並且依(2) $g(Z_0) < f(g(Z_0))$，得出矛盾. 而定理就證明完了.

現在證明 Z_0 確是全序子集. Z_0 中的元 a 叫做特種的，是指 $z \in Z_0$ 且 $z < a \Longrightarrow f(z) \leqslant a$. a_0 是特種元，因為實際上 $z < a_0$ 永遠不成立. 對於每個特種元 a, 令

$$B(a) = \{z \mid z \leqslant a,\ z \in Z_0\} \cup \{z \mid z \geqslant f(a),\ z \in Z_0\}.$$

今考察任意一個特種元 a. 由於 $a_0 \leqslant a$, 所以 $a_0 \in B(a)$. 如果 $z \in B(a)$，那末或者 $z \leqslant a$，或者 $z \geqslant f(a)$. 但如果 $z < a$，必然 $f(z) \leqslant a$，因為 a 是特種元. 如果 $z = a$ 或 $f(a) \leqslant z$, 那末 $f(a) \leqslant f(z)$，從而無論如何 $f(z) \in B(a)$. 設 K 是由 $B(a)$ 中的元組成的一個不空全序子集. 如果K中一切元 $\leqslant a$, 那末 $g(K) \leqslant a$. 從而由 $g(K) \in Z_0$ 可知 $g(K) \in B(a)$. 如果 $\exists\, k \in K,\ k \not\leqslant a$, 那末 $f(a) \leqslant k \leqslant g(K)$, 從而

$g(K) \in B(a)$. 無論如何，$g(K) \in B(a)$. 於是綜合上述，對於每個特種元 a，$B(a)$ 是 Zorn 集. Z_0 既是最小 Zorn 集，對於每個特種元 a，$Z_0 \subset B(a)$. 於是 $Z_0 = B(a)$.

現在證明由一切特種元組成的集 A 本身是一 Zorn 集. 首先，a_0 既是特種元，所以 $a_0 \in A$. 其次如果 a 是特種元，$f(a)$ 也必然是特種元. 事實上，考查 $z < f(a)$，$z \in Z_0$. 依上面所已證的，$z \in B(a) (= Z_0)$，所以或 $z \leqslant a$ 或 $f(a) \leqslant z$. 如果 $z \leqslant a$，那末當 $z<a$ 時，$f(z) \leqslant a < < f(a)$，而當 $z = a$ 時，$f(z) = f(a)$. 設 K 是由特種元組成的一個不空全序子集，我們證明 $g(K)$ 是特種元. 顯然 $g(K) \in Z_0$，因為 Z_0 是 Zorn 集. 設 $z < g(K)$. 如果存在 $k \in K$，$z < k$，那末由於 k 是特種元，$f(z) \leqslant k \leqslant g(K)$. 如果滿足上述條件的 k 不存在，那末由於每個 $k \in K$ 是特種元，$B(k) = Z_0$，所以 $z \in B(k)$，從而或者 $z \leqslant k$ 或者 $f(k) \leqslant z$. 但如果 $f(k) \leqslant z$，必然 $k \leqslant z$. 這一不等式在 $z \leqslant k$ 的情形下也成立，因為依假定不可能 $z < k$. 但如果每個 $k \in K$ 是 $\leqslant z$ 的，那末 $g(K) \leqslant z$，與 $z < g(K)$ 矛盾.

於是 $A = Z_0$，即 Z_0 中每個元是特種的. 設 $a, b \in Z_0$，那末 a 是特種元，所以可以作 Zorn 集 $B(a)$. 於是 $B(a) = Z_0$，從而 $b \in B(a)$，即或 $b \leqslant a$ 或 $f(a) \leqslant b$. 但如果 $f(a) \leqslant b$，則 $a \leqslant b$. 所以 Z_0 是全序子集. 證完.

註. 關於 Zorn 輔助定理，證明很多，近來有一最短的證明（只一頁！），見

J. D. Weston, A short proof of Zorn's lemma, Arch. Math., 8 (1957), 279.

現在反過來由 Zorn 輔助定理證明選擇公理.

定理. 設 Zorn 輔助定理成立，即設當序集 A 中每個全序子集 B 必在 A 中有上端時，必然 A 有極大元，那末對於每個集族 $\mathfrak{M} = \{A_\iota\}_{\iota \in I}$，這裏諸 A_ι 兩兩不相交，且都是不空的，必存在一個由 $\mathfrak{M}$ 到 $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ 中的映像 φ，使

$$f(A_\iota) \in A_\iota \quad (\iota \in I).$$

證．設

$$M_0 = \bigcup_{\iota \in I} A_\iota.$$

令 $\mathfrak{H}$ 表示含在 M_0 中並與每個 A_ι 至多有一公共元的集的全體．$\mathfrak{H}$ 按包含關係成爲一序集．$\mathfrak{H}$ 是不空的，因爲 M_0 中的空子集屬於 $\mathfrak{H}$．設 $\mathfrak{K}$ 是由 $\mathfrak{H}$ 中元組成的一個不空全序子集，於是 $K = \bigcup_{Z \in \mathfrak{K}} Z$ 是 $\mathfrak{H}$ 中的元．事實上，設 $\mathfrak{M}$ 中有一元 A 與 K 交於兩個不同元 x_1, x_2，那末 x_1 屬於一個 $K_1 \in \mathfrak{K}$，x_2 屬於一個 $K_2 \in \mathfrak{K}$，而因 $\mathfrak{K}$ 是全序子集，無妨設 $K_1 \subset K_2$，所以 $x_1, x_2 \in K_2$，與 $K_2 \in \mathfrak{K}$ 矛盾．所以 K 是 $\mathfrak{H}$ 中 $\mathfrak{K}$ 的上端．依 Zorn 輔助定理，$\mathfrak{H}$ 有一極大元 M．M 與每個 $A_\iota \in \mathfrak{M}$ 至多有一公共元．如果有一 $A \in \mathfrak{M}$，使 $M \cap A = \phi$，那末對於每個 $a \in A$，集 $M \cup \{a\}$ 是 $\mathfrak{H}$ 中的元，並且眞包含 M（即包含 M 而不等於 M）．所以與 M 的極大性矛盾．於是得知 M 與 $\mathfrak{M}$ 中每元恰有一個公共元．設對於每個 $A_\iota \in \mathfrak{M}$，令 $\varphi(A_\iota)$ 是 $A_\iota \cap M$ 中的唯一元．φ 即是所求的映像．證完．

第一章　各種一般拓撲空間

本章介紹最一般的拓撲空間的一些基本性質，並爲以後各章作準備.

§1.　鄰域與收斂，開集與閉集

定義 1. 我們說，在不空集E上定義一拓撲結構(或稱形勢)，是指對於E中每一元，規定了E的一些子集，這些子集的每一個叫作元x的鄰域；這些作爲x的鄰域的集組成一個集族，表示成$\mathfrak{V}(x)$，這一集族必須滿足下列諸條件：

V_1: $V\in\mathfrak{V}(x)\Longrightarrow x\in V$，換句話說，每一點的每個鄰域必含這一點；

V_2: $V\in\mathfrak{V}(x)$ 且 $B\supset V$(B表E的子集) $\Longrightarrow B\in\mathfrak{V}(x)$，換句話說，如一子集包含元$x$的某一鄰域，這子集本身也是$x$的鄰域；

V_3: 對於任意非負數n, $V_1,\cdots,V_n\in\mathfrak{V}(x)\Longrightarrow V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_n\in$ $\in\mathfrak{V}(x)$，換句話說，$\mathfrak{V}(x)$中有窮多個集的交仍是x的鄰域；

V_4: $V\in\mathfrak{V}(x)\Longrightarrow\exists W\in\mathfrak{V}(x)$，使 $y\in W\Longrightarrow V\in\mathfrak{V}(y)$，換句話說，對於元$x$的每一鄰域$V$，必有$x$的一個鄰域$W$，使$V$爲$W$中每個元的鄰域.

賦有拓撲結構的集叫作*拓撲空間*，而其元叫作這空間的*點*，$\mathfrak{V}(x)$叫作點x的*鄰域組*.

註 1.　由V_2或V_3可知空間E本身是其中任意點的鄰域，因爲依照規定，0 個子集的交是原來的整個集. 由此可知對於任意點x, $\mathfrak{V}(x)$是不空的集族.

例 1.　設E是實數全體組成的集R. 對於每一個實數x，凡包含一個以x爲中點的開區間$]x-\delta,x+\delta[$ $(\delta>0)$的實數子集V算作x的鄰域. 不難驗明，這樣規定的鄰域的確滿足定義 1 中的條件 V_1—

V_4. 這樣在 R 上定義的拓撲空間叫作數直綫.

例 2. 設 E 爲任意集,而對於 E 中每個元 x,規定

$$\mathfrak{V}(x) = \{E\},$$

即由 E 的子集 E 單獨組成的集族. 容易驗明,這樣的 $\mathfrak{V}(x)$ 滿足定義 1 中的一切條件,而這樣在 E 上定義的拓撲結構叫作最粗的拓撲結構(理由將在後面說明).

例 3. 設 E 是任意集,而對於 E 中每個元 x,令

$$\mathfrak{V}(x) = \{A \mid A \ni x,\ A \subset E\},$$

即規定 E 中每個含 x 的子集作爲 x 的鄰域. 容易驗明,這樣規定的鄰域滿足定義 1 中的一切條件. 這樣定義在 E 上的拓撲結構叫作 E 上的散形勢,而賦以散形勢的集叫作散空間.

註 2. 例 2 與例 3 中的兩種拓撲結構都叫作不足道的.

例 4. 設 E 是任意無窮集. 規定對於任意元 $x \in E$,含 x 且其補集爲有窮的任意集取作 x 的鄰域. 容易驗明,定義 1 中的一切條件都能滿足.

由例 1, 例 2, 例 3, 例 4 可見,在一個集上可以規定種種不同的形勢. 例如當實數全體 R 上規定了散形勢時,它就不能稱作數直綫了. 嚴格地說,如果在集 E 上規定了形勢 τ, 則所獲得的拓撲空間應當表示成 E_τ 以示區別. 通常如果沒有發生混淆的危險時,可以略去標號 τ, 而仍以 E 表示由集 E 作成的拓撲空間.

例 5. 設 E 是一個全序集. 對於 E 中每個元 x, 規定所有含一形如 $]z, x]$ $(z < x)$ 的開區間 (即集 $\{y \mid z < y \leqslant x\}$) 或含區間 $]\leftarrow, x]$ (即集 $\{y \mid y \leqslant x\}$) 的集作爲 x 的鄰域. 不難驗明,這樣規定的鄰域滿足定義 1 中的一切條件. 這樣在全序集上規定的形勢表示成 $\mathfrak{x}_-$, 下面經常要用到它.

定義 2. 設 E 是一個拓撲空間,而 x 是其中一點. 所謂點 x 的一些鄰域形成 x 的一個基本鄰域組(或稱空間 E 在點 x 處的基) $\mathfrak{U}(x)$, 是指對於每個 $V \in \mathfrak{V}(x)$, 必存在 $U \in \mathfrak{U}(x)$, 使 $V \supset U$.

例 1. 在任意拓撲空間中, $\mathfrak{V}(x)$ 本身就是 x 的一個基本鄰域組.

例 2.　在數直綫 R 中，含點 x 的一切開區間組成 x 的一個基本鄰域組．又以 x 爲中點的一切開區間也形成 x 的一個基本鄰域組．以 x 爲中心而長度爲有理數的開區間也形成 x 的一個基本鄰域組．

註．規定一個集上的形勢時，只須知道各點 x 的基本鄰域組 $\mathfrak{U}(x)$ 就够了，因爲這時 x 的鄰域組 $\mathfrak{V}(x)$ 就可規定成

$$\mathfrak{V}(x) \equiv \{V \mid V \subset E, \exists U \in \mathfrak{U}(x), 使 U \subset V\}.$$

爲了與基本鄰域組 $\mathfrak{U}(x)$ 相對待，以前規定的鄰域組 $\mathfrak{V}(x)$ 也稱作 x 的完全鄰域組．

定義 3.　所謂拓撲空間 E 中的半序點列，簡稱點列，是指一組附以指標 $\delta \in \Delta$ 的點 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$，其中 Δ 是一個定向半序集．

例 1.　最常用的點列是平常所謂的初等點列 $\{x_n\}_{n\in N}$（$N = \{1, 2, \cdots\}$ 表示自然數全體依自然順序排成的定向序集）．在數學分析中常用這種點列．

例 2.　在積分論中，常考察 R 中的半序點列．設 $[a, b]$ 是一區間，而考察 $[a, b]$ 的一切有窮分割 $\mathscr{P}$：

$$\mathscr{P}: \qquad a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

其中諸點 t_k 叫作分割 $\mathscr{P}$ 的分點．所謂分割 $\mathscr{P}_1$ 比分割 $\mathscr{P}_2$ 爲精，是指 $\mathscr{P}_2$ 中的分點也同時是 $\mathscr{P}_1$ 的分點，表示成 $\mathscr{P}_2 \prec \mathscr{P}_1$．於是 $[a, b]$ 的一切有窮分割依半序關係 $\prec$ 形成一個定向半序集 Π．對於一個連續函數 $x(t)$ $(a \leq t \leq b)$，作和

$$s_{\mathscr{P}} = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}), \quad m_i = \min_{t_{i-1}\leq t\leq t_i} x(t).$$

於是

$$\{s_{\mathscr{P}}\}_{\mathscr{P}\in\Pi}$$

即是一個半序數列．

例 3.　在任意拓撲空間 E 中，設 x 爲其中一點．對於 x 的一個基本鄰域組 $\mathfrak{U}(x)$，從每個 $U \in \mathfrak{U}(x)$ 中取出一點 $x_U \in U$，則因 $\mathfrak{U}(x)$ 中諸集依包含關係 $\supset$ 形成一個定向半序集（注意定義 1 的條件 3 及基本鄰域組的定義），從而 $\{x_U\}_{U\in\mathfrak{U}(x)}$ 是 E 中一個半序點列．

定義 4. 設 E 是一拓撲空間,而 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 是 E 中一個半序點列. 所謂點列 $\{x_\delta\}$ 收斂於點 $x_0(\in E)$, 是指對於每個 $V\in\mathfrak{U}(x_0)$($\mathfrak{U}(x_0)$ 表示 x_0 的某一基本鄰域組),必存在一標號 $\delta_V\in\Delta$, 使

$$\delta\succ\delta_V\Longrightarrow x_\delta\in V.$$

x_0 叫作點列 $\{x_\delta\}$ 的極限. 我們把這一事實表示成

$$\lim_{\delta\in\Delta}x_\delta=x_0,\quad\text{或}\quad x_\delta\to x_0.$$

註. 這裏定義的收斂與點 x_0 的基本鄰域組的特殊選擇無關. 實際上,設 $\mathfrak{U}_1(x_0)$ 是點 x_0 的另一基本鄰域組,取 $U\in\mathfrak{U}_1(x_0)$, 則依基本鄰域組的定義,存在 $V\in\mathfrak{U}(x_0)$, 使 $V\subset U$. 既然已知按照基本鄰域組 $\mathfrak{U}(x_0)$ 來說,點列 $\{x_\delta\}$ 收斂於 x_0, 依定義,存在一標號 $\delta_V\in\Delta$, 使

$$\delta\succ\delta_V\Longrightarrow x_\delta\in V,$$

從而

$$\delta\succ\delta_V\Longrightarrow x_\delta\in U,$$

即按照基本鄰域組 $\mathfrak{U}_1(x_0)$ 來說,點列 $\{x_\delta\}$ 也收斂於 x_0. 特別可取 $\mathfrak{U}(x_0)$ 為 x_0 的一個完全鄰域組.

例 1. 如果 Δ 是自然數列, 則定義 4 中的收斂與平常數學分析中遇到的相同, 即所謂點列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 收斂於點 x_0, 是指對於 x_0 的每一鄰域 U,存在一自然數 n_U, 使

$$n\geqslant n_U\Longrightarrow x_n\in U.$$

例 2. 考察定義 3 的例 2. 令

$$s=\sup_{\mathfrak{D}\in\mathfrak{U}}s_{\mathfrak{D}},$$

那末在數學分析中論黎曼積分時所證明的事實就是說

$$\lim_{\mathfrak{D}\in\mathfrak{U}}s_{\mathfrak{D}}=s.$$

例 3. 在定義 3 下的例 3 中,

$$\lim_{U\in\mathfrak{U}(x_0)}x_U=x_0.$$

定義 5. 設 Δ_1 是定向半序集 Δ 的共尾部分, 那末半序點列

$$\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta_1}$$

叫作半序點列 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 的子列.

定理 1. 如果一個半序點列$\{x_\delta\}_{\delta\in\varDelta}$中的每一點都是一個固定的元$x_0$，那末點列$\{x_\delta\}$收斂於$x_0$。任意半序點列的子列與原點列收斂於同一極限。

證. 定理的前半部的證明很容易，從略。為了證明後半部，設$\{x_\delta\}_{\delta\in\varDelta}$收斂於點$x_0$，並設$\{x_{\delta'}\}_{\delta'\in\varDelta'}$是$\{x_\delta\}$的子列，即$\varDelta'$是定向半序集$\varDelta$的共尾子集，於是對於$x_0$的任意鄰域$V$，必存在$\delta_0\in\varDelta$，使

$$\delta\succ\delta_0\Longrightarrow x_\delta\in V;$$

而由共尾子集的定義，存在$\delta_0'\in\varDelta'$，使$\delta_0'\succ\delta_0$，從而

$$\delta'\in\varDelta',\ \delta'\succ\delta_0'\Longrightarrow x_{\delta'}\in V,$$

即子列$\{x_{\delta'}\}$收斂於x_0。

註. 設在一集E中以某種確定的方式規定元列的收斂：$\{a_n\}_{n\in N}\to$ $\to a_0$，使這種收斂滿足下列兩條件：

1. 如元列$\{a_n\}$中每個元$a_n=a$，則$\{a_n\}\to a$；

2. 如元列$\{a_n\}$收斂於a_0，則$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{k_n}\}$也收斂於a_0（這裏$k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots$）。

這時，E叫作$(\mathfrak{L})$型空間（依 Fréchet 意義[1]）。注意，定理 1 說明上面定義的半序點列的收斂是 Fréchet 意義收斂的推廣。

定義 6. 在拓撲空間E中，所謂點x_0是E中集A的附着點，是指由A中點可作出一半序點列收斂於x_0。所謂點x_0是A的積集點，是指由集

$$A\cap C\{x_0\}\equiv A\setminus\{x_0\}$$

中的點可作一半序點列收斂於x_0。A的一切附着點所組成的集叫作A的閉包，表示成$\overline{A}$。A的一切積集點所組成的集叫作A的導集，表示成A'。

註. 在平常實數空間R中，如果考察平常點列的收斂，則上面正是平常數學分析中定義導集、閉包等的方法。

定理 2. 設A是拓撲空間E中一個集。為了$x_0\in\overline{A}$（或相應地

1) 見 M. Fréchet, Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale, 1928, p. 164.

$x_0\in A'$），必須且只須 x_0 的每個鄰域 V 與 A（或相應地與 $A\cap C\{x_0\}$）相交.

證. 必要性由定義 6 及定義 4 直接看出. 為了證明充分性，設 x_0 的每一鄰域 V 與 A（與 $A\cap C\{x_0\}$）相交. 取一點 $x_V\in V\cap A$（或 $x_V\in V\cap A\cap C\{x_0\}$），而依相含關係定 $\mathfrak{V}(x_0)$ 的序（即 $U\prec V\Longrightarrow U\supset V$），那末半序點列 $x_V\to x_0$（在 A' 的情形，$x_V\neq x_0$），從而 $x_0\in\bar{A}$（$x_0\in A'$）.

定理 3. 設 A 如定理 2，那末 $\bar{A}=A\cup A'$.

證. 依定義 6 及定理 1，不難看出 $A\cup A'\subset\bar{A}$. 今證 $\bar{A}\subset A\cup A'$，為此只須證 $\bar{A}\setminus A\subset A'$. 設 $x_0\in\bar{A}\setminus A$，依定理 2，x_0 的每個鄰域與 A 相交，而既然 $x_0\notin A$，x_0 的每個鄰域與 $A\cap C\{x_0\}$ 相交，所以依定理 3，$x_0\in A'$.

定理 4. 設 E 是一拓撲空間，那末其中集的閉包具有下列性質：

1°. $\bar{A}\supset A$;

2°. $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$;

3°. $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$;

4°. $\bar{E}=E$, $\bar{\phi}=\phi$.

證. 1° 由定理 3 得知，而 4° 不待證. 由 1° 已知 $\bar{\bar{A}}\supset\bar{A}$，而依定義 6 或定理 2，$A\subset B\Longrightarrow\bar{A}\subset\bar{B}$. 所以為了完成本定理的證明，只須證 $\bar{\bar{A}}\subset\bar{A}$，並且 $\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$.

設 $x_0\in\bar{\bar{A}}$. 取 $V\in\mathfrak{V}(x_0)$，依定義 1 的 V_4，取 $W\in\mathfrak{V}(x_0)$，使 $y\in W\Longrightarrow V\in\mathfrak{V}(y)$. W 既是 x_0 的鄰域，依定理 2，$W\cap\bar{A}\neq\phi$. 設 $z\in W\cap\bar{A}$，依上述，V 既是 W 中每個元的鄰域，所以 V 也是 z 的鄰域. 依定理 2，既然 $z\in\bar{A}$，所以 $V\cap A\neq\phi$. V 既是 x_0 的任意鄰域，所以 $x_0\in\bar{A}$. 於是 $\bar{\bar{A}}\subset\bar{A}$ 證明了.

今設 $y_0\in\overline{A\cup B}$，而 $y_0\in\bar{A}$，那末依定義 6，由 $A\cup B$ 中可取出一半序點列 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 來，使 $x_\delta\to y_0$. 如果 $\{x_\delta\}$ 有一子列 $\{x_{\delta'}\}$ 屬於 A，那末依定理 1，$x_{\delta'}\to y_0$，從而依定義 6，$y_0\in\bar{A}$，與假定不符. 因此必然存在 $\delta_0\in\Delta$，使 $\delta\succ\delta_0\Longrightarrow x_\delta\in B$. 但 $\{x_\delta\}_{\delta\succ\delta_0}$ 是 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 的一個子列，從而

$$\lim_{\delta > \delta_0} x_\delta = y_0,$$

即依定義 6，$y_0 \in \overline{B}$。於是證明完結。

註．1）由上面的證明不難看出

$$(A \cup B)' = A' \cup B'.$$

2）有些著者從本定理中的事實出發定義拓撲空間[1]。事實上，在集 E 上，規定一個由 E 的子集族 $\mathfrak{P}(E)$ 到其自己之中的對應 $A \to \overline{A}$，使這對應滿足定理 5 的 4 個條件。規定 $\overline{A}$ 中的點叫作 A 的附着點，$\overline{A} \setminus A$ 中的點叫作 A 的積集點，而定義集 V 叫作點 x 的鄰域，是指 $\overline{CV} \not\ni x$，那末不難證明可以定義 E 上的拓撲結構，滿足定義 1 中的一切條件。這些證明留給讀者作練習。

定義 7. 在一拓撲空間中，集 A 叫作閉集，是指 $A = \overline{A}$。閉集的補集叫作開集。

註．依定理 4，空間本身 E 及空集 ϕ 都是閉集；又因 $CE = \phi$，所以 E 與 ϕ 也是開集。

定理 5. 在一拓撲空間 E 中，爲了集 A 是開集，必須且只須對於每個點 $x \in A$，$A \in \mathfrak{V}(x)$，換言之，A 是它自己每個點的鄰域。

證．1）必要性．如 A 是開集，則 CA 是閉集．對於 $x \in A$，則 $x \in \\!\in CA = \overline{CA}$，從而依定理 2，必存在 $V \in \mathfrak{V}(x)$，使 $V \cap CA = \phi$，也就是說，$V \subset A$。於是依定義 1 的 V_2，$A \in \mathfrak{V}(x)$。

2）充分性．設對於每個 $x \in A$，$A \in \mathfrak{V}(x)$，又設 $y \in \overline{CA}$，依定理 2，$V \in \mathfrak{V}(y) \Longrightarrow V \cap CA \neq \phi$，即任何 $V \in \mathfrak{V}(y)$ 都不滿足 $V \cap CA = \phi$，從而 A 不可能是 y 的鄰域．依所設，$y \notin A$，從而 $\overline{CA} \subset CA$，即 CA 是閉集，而 A 是開集。

定義 8. 在拓撲空間 E 中，點 x 叫作集 A 的內點，是指 $A \in \mathfrak{V}(x)$。點 x 叫作 A 的外點，是指 $CA \in \mathfrak{V}(x)$。點 x 叫作 A 的緣點，是指 x 既不是 A 的內點，又不是 A 的外點。集 A 的一切內點所形成的集叫作 A 的

1）定理 4 中的 $1°$—$4°$ 稱作 Kuratowski 公理，見 K. Kuratowski, Topologie, tome 1.

內部，表示成 $\mathring{A}$. A 的外點的集叫作 A 的外部，表示成 $\mathrm{Ext}(A)$[1]. 而 A 的緣點的全體叫作 A 的緣，表示成 $\mathrm{Fr}(A)$[1].

定理 6. 在拓撲空間 E 中，對於任意集 A，

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{CA}.$$

證. 如果 $x \in \mathrm{Fr}(A)$，那末 $A \notin \mathfrak{V}(x)$，$CA \notin \mathfrak{V}(x)$，所以 x 的任何鄰域 V 都不含於 A 中，也不含於 CA 中，也就是說，

$$V \cap CA \neq \phi \neq V \cap A.$$

依定理 2，$x \in \overline{A} \cap \overline{CA}$. 把上述步驟逆行，可以證明

$$x \in \overline{A} \cap \overline{CA} \Longrightarrow x \in \mathrm{Fr}(A).$$

定理 7. 設 A 是拓撲空間中任意集，那末

$$\mathring{A} = \mathrm{Ext}(CA) = C\,\overline{CA}.$$

證. 設 $x \in \mathring{A}$，那末 $A \in \mathfrak{V}(x)$. 既然 $A \cap CA = \phi$，所以 $x \notin \overline{CA}$. 反之，如果 $x \notin \overline{CA}$，那末 x 必有一鄰域 V 與 CA 不相交，即 $V \subset A$. 從而 $A \in \mathfrak{V}(x)$.

系. 爲了 A 是開集，必須且只須 $A = \mathring{A}$.

定理 8. 設 A 是拓撲空間 E 中的一個集，那末 $\overline{A}$ 是含 A 的最小閉集，而 $\mathring{A}$ 是包含在 A 中的最大開集.

證. 依定理 7，本定理的後半部乃是前半部的直接後果. 依定理 4，$\overline{A}$ 是閉集，並且包含 A. 如果 B 是包含 A 的閉集，那末由定理 4 的證明可知 $B = \overline{B} \supset \overline{A}$，從而證完.

例. 在實數直綫 R 中，凡閉區間 $[a, b]$ 是閉集，而凡開區間 $]a, b[$ 是開集. 半開半閉的區間 $[a, b[$ 既不是開集也不是閉集. 如果令 $A = [a, b[$，那末

$$\overline{A} = [a, b], \quad \mathring{A} =]a, b[.$$

定理 9. 設 $\mathfrak{O}$（或 $\mathfrak{f}$）是拓撲空間 E 中一切開集（或閉集）所組成的集族，那末

O_1: $\mathfrak{O}$ 中任意多個集的併仍屬於 $\mathfrak{O}$（F_1: $\mathfrak{f}$ 中任意多個集的交也屬於 $\mathfrak{f}$）；

O_2: $\mathfrak{O}$ 中有窮多個集的交仍屬於 $\mathfrak{O}$（F_2: $\mathfrak{f}$ 中有窮多個集的併也屬於 $\mathfrak{f}$）.

1) 從拉丁文 exterior (外)及 frons (邊緣)得來.

證．依定義及集演算中的對偶原理，只須證明 O_1—O_2 部分就够了．設 $G_\iota \in \mathfrak{O}$（$\iota \in I$，I 爲任意勢的標號族），並設 $x \in \bigcup_{\iota \in I} G_\iota$，那末必存在標號 $\iota_0 \in I$，使 $x \in G_{\iota_0}$．依定理 5，$G_{\iota_0} \in \mathfrak{V}(x)$，而依定義 1 中的 V_2，$\bigcup_{\iota \in I} G_\iota \in \mathfrak{V}(x)$．$x$ 既是 $\bigcup_\iota G_\iota$ 中任意點，依定理 5，$\bigcup_\iota G_\iota$ 是開集．

設 I 是標號的有窮族，而令 $G = \bigcap_{\iota \in I} G_\iota$．取任意 $x \in G$，那末對於每個 $\iota \in I$，$G_\iota \in \mathfrak{V}(x)$，從而依定義 1 中的 V_3，$G = \bigcap_{\iota \in I} G_\iota \in \mathfrak{V}(x)$，即依定理 5，$G$ 是開集．

定理 10. 設 E 是一集，$\mathfrak{O}$ 爲 E 中某些子集所組成的集族，並且 $\mathfrak{O}$ 滿足定理 9 的條件 O_1—O_2．如果對於每個元 $x \in E$，規定集 $V \in \mathfrak{V}(x)$，是指存在 $O \in \mathfrak{O}$，使 $x \in O \subset V$，那末 $\mathfrak{V}(x)$ 滿足定義 1 中的 V_1—V_4，從而藉它可以在 E 上定義一拓撲結構，而 E 成爲一拓撲空間．在這一空間中，$\mathfrak{O}$ 恰是 E 的一切開集所組成的集族．

註 1. 由此可知，含一點的開集組成這點的一個基本鄰域組．因此有些作者把鄰域理解成含一點的開集，例如 Hausdorff[1]．

證．V_1, V_2 都不須證．V_3 由 O_2 直接推出．剩下的只是要證明 V_4．設 $V \in \mathfrak{V}(x)$，依定義，存在 $O \in \mathfrak{O}$，使 $x \in O \subset V$．如果 $y \in O$，則因 $y \in O \subset V$，所以 $V \in \mathfrak{V}(y)$，從而 O 滿足 V_4 的要求．

最後要證明，用這些鄰域規定 E 的拓撲結構，則 $\mathfrak{O}$ 恰好是 E 中的一切開集．設 $O \in \mathfrak{O}$，依上述規定，對於每個 $x \in O$、$O \in \mathfrak{V}(x)$，從而依定理 5，O 是開集．反之，設 B 是開集，依定理 5，對於每個 $x \in B$，$B \in \mathfrak{V}(x)$．依上面的規定，必存在 $O_x \in \mathfrak{O}$，使 $x \in O_x \subset B$．因此依 O_1，

$$B = \bigcup_{x \in B} O_x \in \mathfrak{O}.$$

註 2. 如在集 E 中已知一集族 $\mathfrak{f}$ 滿足 F_1 及 F_2，那末 $\mathfrak{f}$ 中的集在 E 中的補集組成一個滿足 O_1 及 O_2 的集族，從而在 E 上定義一個拓撲結

1) 見 F. Hausdorff, Mengenlehre, 3. Aufl.

構,使 $\mathfrak{f}$ 恰是這樣定義出來的拓撲空間中的閉集族.

定義 9. 拓撲空間中一些開集組成的組 $\mathfrak{B}$ 叫作空間的(開)基,是指空間中每個開集是 $\mathfrak{B}$ 中某些集的併.

例. 在數直綫中,一切開區間形成一個基[1].

定理 11. 在一拓撲空間中,

1) 爲了集 A 是閉集,必須且只須 $A\supset \mathrm{Fr}A$;

2) 爲了集 A 是開集,必須且只須 $CA\supset \mathrm{Fr}A$;

3) 爲了 $\mathrm{Fr}(A)=\phi$, 必須且只須 A 是既開且閉的.

證. 由定理 6 可知 $\mathrm{Fr}(A)=\mathrm{Fr}(CA)$,從而 2)是 1)的直接後果. 現在只須證 1) 及 3).

關於 1): 設 A 是閉集,那末 $A=\overline{A}\supset\overline{A}\cap\overline{CA}=\mathrm{Fr}(A)$. 反之,如果 $A\supset\overline{A}\cap\overline{CA}$,那末 $\overline{A}=\overline{A}\cap(A\cup CA)=(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap CA)\subset$ $\subset A\cup(\overline{A}\cap\overline{CA})=A$, 從而 $\overline{A}=A$.

關於 3): 設 $\mathrm{Fr}(A)=\phi$, 那末依 1) 及 2), A 是既開且閉的. 反之,設 A 是既開且閉的, 那末依 1) 及 2), $\mathrm{Fr}(A)\subset A\cap CA=\phi$, 從而 $\mathrm{Fr}(A)=\phi$.

定義 10. 在一拓撲空間 E 中,

1°. 如果 $\overline{A}=E$,那末 A 叫作稠集;

2°. 如果 $\overline{CA}=E$,那末 A 叫作綫性集;

3°. 如果 $C\overline{\overline{A}}=E$,那末 A 叫作疏稀集;

4°. 如果 $\{x_0\}\in\mathfrak{V}(x_0)$,那末 x_0 叫作 E 中的孤立點;

5°. 如果 $A=A'$,那末 A 叫做完集.

註. 1) 由定義可以看出,凡疏稀集必是綫性集,凡閉的綫性集必是疏稀集. 但一般綫性集不必是疏稀集. 例如在數直綫上,一切有理點所組成的集 $\mathfrak{Q}$ 是綫性集,但因 $\overline{\mathfrak{Q}}=E$, 所以 $\overline{C\overline{\mathfrak{Q}}}=\overline{\phi}=\phi$, 從而 $\mathfrak{Q}$ 不是疏稀集.

2) 包含稠集的集仍是稠的. 含在綫性集(或疏稀集)中的集仍是綫性的(或疏稀的).

1) 證明見 Натансон 實變函數論第 2 章, §5.

3）唯一的開緣性集是空集． 事實上，爲了A是緣性集，必須且只須$\mathring{A}=\phi$，因爲依定理7，$\mathring{A}=C\overline{CA}$． 緣性集也可以定義成沒有內點的集，也就是含在它的緣中的集（即$A\subset\overline{A}=\mathrm{Fr}A$），因此叫作“緣性集”．

4）爲了A是疏稀集，必須且只須$A\subset\overline{C\overline{A}}$．事實上，必要性容易看出． 而反之，如果$A\subset\overline{C\overline{A}}$，那末因爲$\overline{A}\subset\overline{C\overline{A}}=\overline{C\overline{A}}$，所以$E=\overline{A}\cup\cup C\overline{A}\subset\overline{C\overline{A}}\cup C\overline{A}=\overline{C\overline{A}}$，即$\overline{C\overline{A}}=E$．

5）爲了A是疏稀集，必須且只須每個不空開集必包含一個與A不相交的不空開集．事實上，爲了A是疏稀集，必須且只須空間中每個點是$C\overline{A}$的附着點，即必須且只須每個不空開集與$C\overline{A}$相交（見定理10後的註1），也就是說，每個不空開集含一個不在$\overline{A}$中的點，從而必須且只須每個不空開集包含一個與A不相交的不空開集．

6）稠集不可能同時是疏稀集，因爲一般$E\neq\phi$．

7）如有一疏稀集只包含一點，那末這點不是空間的孤立點．事實上，如$\{x\}$是疏稀集，那末$\{x\}$不可能是開集，否則這一不空開集要含一個與$\{x\}$不相交的開集，得出矛盾．這命題的逆不真．取一不空集，附以最粗的拓撲結構（定義1下例2），任取一點x，那末x不是孤立點． 這時$\overline{\{x\}}=E$，$\overline{C\overline{\{x\}}}=\phi$[1]．

8）爲了集A是疏稀集，必須且只須$C\overline{A}$是稠集．

9）有窮多個疏稀集的併仍是疏稀集，這由上面註5)容易看出．

例．Cantor的三進位間斷統[2]乃是一閉的疏稀集．

定理12. 在一拓撲空間E中，任意集A的緣可以表示成兩個緣性集的併．

證．由定理6，

$$\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{CA}=(A\cap\overline{CA})\cup(\overline{A}\cap CA).$$

現在證明$A\cap\overline{CA}$（由公式的對稱性也可知道$CA\cap\overline{A}$）是緣性集就够了．實際上，

1）由此可知 N. Bourbaki, Topologie générale (Les structures fondamentales de l'analyse), Éléments de mathématiques, Livre III, Chapitre IX, 73頁例1是錯誤的．

2）見 Натансон 實變函數論第二章．

$$\overline{C(A\cap\overline{CA})}=\overline{CA}\cup C\overline{\overline{CA}}=\overline{CA}\cup C\overline{CA}\subset\overline{CA}\cup C\overline{CA}=E.$$

註. 設A是閉集，那末$\mathrm{Fr}(A)=A\cap\overline{CA}$. 從而依上面定理的證明，閉集（同理開集）的緣是緣性的. 但一般，點集的緣不必是緣性集！例如在數直綫上，有理數的集的緣是空間R，而$\overline{CR}=\phi$.

§2. 連續映像，同胚性，拓撲結構精粗的比較，子空間

定義 1. 從拓撲空間E_1到拓撲空間E_2中的映像$y=f(x)$叫作在$x_0(\in E_1)$處連續，是指對於E_1中任意收斂於x_0的半序點列$(x_\delta)_{\delta\in\Delta}$，$E_2$中的半序點列$(f(x_\delta))_{\delta\in\Delta}$收斂於$f(x_0)$. 如果$f$在$x_0$處不連續，那末我們說$f$在$x_0$處是間斷的. 如果$f$在每個點$x\in E_1$處連續，那末$f$叫作由$E_1$到$E_2$中的連續映像.

註. 特別如果E_2是數直綫R，那末由E_1到R的連續映像叫作E_1上的連續函數[1]. 以後將見到，連續函數的概念在拓撲學中佔着很重要的地位.

例 1. 由一拓撲空間E到它自己之上的不變映像$x\to x$是連續映像.

例 2. 設E_1是散空間，那末由E_1到任意一個拓撲空間E_2中的任意映像必是連續的，因爲這時$\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}\to x_0$只有當存在一個$\delta_0\in\Delta$，使$\delta\succ\delta_0\Longrightarrow x_\delta=x_0$時成立. 從而對於任意映像$f$，$f(x_\delta)=f(x_0)\to\to f(x_0)(\delta\succ\delta_0)$.

例 3. 設E是一可數無窮集，附以§1定義1下例4所述的那種拓撲結構，設f是由E到數直綫中的連續映像. E中的一切點表示成$\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$. $\{x_n\}_{n\in N}$成爲一個點列，並且這一點列收斂於任意點x_k $(k=1,2,\cdots)$. 因爲x_k的任意鄰域是E中一個有窮集的補集，所以必包含點列$\{x_n\}$中自某項以後的一切元. 但這樣必然蘊涵：對於任意k，$f(x_n)\to f(x_k)(n\to\infty)$，而由於數直綫上極限的一意性（數學分析中的熟知事實！），$f(x_k)$必是常數，就是說，對於一切k，$f(x_k)=$

[1] 習慣上，如E_1是"抽象"空間，由E_1到R的映像叫作汎函數. 但我們爲簡單起見叫它作函數.

$=\alpha\in R$. 因此可以結論，在這裏所考察的拓撲空間上，不存在異於常數的連續函數. 於是提出了問題：在怎樣的拓撲空間之上才存在着異於常數的連續函數？這一問題將在第二章考察.

例 4. 如果 $E_1=E_2=R$，並且只考慮平常的點列[1] $\{x_n\}_{n\in N}$，那末這裏定義的連續函數就是平常數學分析中的連續函數. 以後將看到，既使考察一般的半序數列，所得的連續函數概念仍是與平常的一樣.

定理 1. 設 E_1, E_2, E_3 都是拓撲空間，而由 E_1 到 E_2 上的映像 $y=f(x)$ 在點 $x_0\in E_1$ 處連續，而由 E_2 到 E_3 中的映像 $z=g(y)$ 在點 $y_0\equiv f(x_0)\in E_2$ 處連續．那末由 E_1 到 E_3 中的映像 $z=g(f(x))\equiv$ $\equiv(g\circ f)(x)$是在點 $x_0\in E_1$ 處連續的映像.

證．事實上，設$\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 是 E_1 中收斂於 x_0 的任意半序點列，那末

$$\lim_{\delta\in\Delta} f(x\delta)=f(x_0)=y_0.$$

從而依 g 在 y_0 點的連續性，可知

$$\lim_{\delta\in\Delta} g(f(x\delta))=g(y_0)=g(f(x_0)).$$

證明完結.

註．由此可見，如果 f 是由 E_1 到 E_2 上的連續映像，而 g 是由 E_2 到 E_3 中的連續映像，那末 $g\circ f$ 是由 E_1 到 E_3 中的連續映像. 這個命題叫作連續映像的合成定理. 如果 $E_1=E_2=E_3=R$，這結果在數學分析中是熟知的.

定理 2. 設 $y=f(x)$ 是由拓撲空間 E_1 到拓撲空間 E_2 中的映像．下面幾個條件是相互等價的：

1) f 是連續映像；

2) 對於 E_2 中每個開集 G，$\overset{-1}{f}(G)$是 E_1 中的開集；

3) 對於 E_2 中每個閉集 F，$\overset{-1}{f}(F)$是 E_1 中的閉集；

4) 對於每個集 $A\subset E_1$，$f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$；

5) 對於空間 E_1 中每一點 x_0，對於 $f(x_0)$ 在 E_2 中的每一鄰域 V，$\overset{-1}{f}(V)$是 x_0 在 E_1 中的鄰域.

---

1) 理由將在以後敘述.

證．我們只須證明 1) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 5) $\Longrightarrow$ 1)．

1) $\Longrightarrow$ 4)：設 A 是 E_1 中任意集，並設 $x_0 \in \overline{A}$，依 §1 定義 6，A 中有一半序點列 (x_δ) 收斂於 x_0．依連續性的定義，$(f(x_\delta))$ 在 E_2 中收斂於 $f(x_0)$，從而依 §1 定義 6，$f(x_0) \in \overline{f(A)}$，即 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$．

4) $\Longrightarrow$ 3)：設 F 是 E_2 中的閉集，$F = \overline{F}$[1]．令 $A = \overset{-1}{f}(F)$，那末 $F = f(A)$，所以依 4)，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{F} = F = f(A)$．於是 $\overline{A} \subset \subset \overset{-1}{f}(f(A)) = \overset{-1}{f}(F) = A$，這就是說，$A$ 是閉集．

3) $\Longrightarrow$ 2)：這很容易看出，因爲 $C_{E_1}\overset{-1}{f}(A) = \overset{-1}{f}(C_{E_2}A)$．

2) $\Longrightarrow$ 5)：設 $x_0 \in E_1$，而 V 是 $f(x_0)$ 在 E_2 中的一個鄰域，依 §1 定理 10，存在 E_2 中的開集 G，使 $f(x_0) \in G \subset V$．依 2)，$\overset{-1}{f}(G)$ 是 E_1 中的開集，並且包含 x_0，從而 $\overset{-1}{f}(G) = U$ 是 x_0 的鄰域（見 §1 定理 5）．於是依 §1 定義 1，$\overset{-1}{f}(V)(\supset \overset{-1}{f}(G))$ 更是 x_0 的鄰域．

5) $\Longrightarrow$ 1)：設 $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ 是 E_1 中一個半序點列，而 (x_δ) 收斂於 $x_0 \in \in E_1$．設 V 是 $f(x_0)$ 在 E_2 中的任意鄰域，依 5)，$\overset{-1}{f}(V)$ 是 x_0 在 E_1 中的鄰域．既然 $x_\delta \to x_0$，必存在 $\delta_V \in \Delta$，使

$$\delta \succ \delta_V \Longrightarrow x_\delta \in \overset{-1}{f}(V),$$

也就是說，

$$\delta \succ \delta_V \Longrightarrow f(x_\delta) \in V,$$

從而 $f(x_\delta) \to f(x_0)$．既然 (x_δ) 是收斂於 x_0 點的任意點列，f 必是連續映像．

定義 2. 由拓撲空間 E_1 到拓撲空間 E_2 上的一對一映像 f 叫作同胚變換，是指 $\overset{-1}{f}$ 與 f 都是連續映像．這時 E_1 與 E_2 叫作同胚的空間．

註．依定理 2 的 2)，3)，同胚映像把兩空間 E_1，E_2 中的開集（閉集）互相映像，從而依 §1 定理 10，同胚映像保存空間的拓撲結構，也就是說，同胚的空間單就它們作爲拓撲空間這一點而論是沒有差異的，也就是指在其拓撲結構方面來講是“抽象地相同”的．

例．$y = x + 1$ 或 $y = 2x$ 是由數直綫 R 到它自己之上的同胚映像．

[1] 注意 $\overline{F}$ 是指 F 在空間 E_2 中的閉包，嚴格地說，在不同的空間中取閉包的運算應以不同符號表示，但通常在沒有發生混淆可能時，不必加以區別．

定義 3. 設集E之上可以附有兩種拓撲結構τ_1和τ_2，各使E成為拓撲空間E_{τ_1}, E_{τ_2}. 設$y = \iota(x)$是由E到E上的不變映像. 如果ι是由E_{τ_1}到E_{τ_2}中的連續映像，那末我們說，拓撲結構τ_1比拓撲結構τ_2精，或τ_2比τ_1粗.

註. 1) 如τ_1比τ_2精，而τ_2也比τ_1精，那末E_{τ_1}與E_{τ_2}是同胚的. 這時τ_1與τ_2叫作等價的拓撲結構.

2) 不難看出，所謂τ_1比τ_2精，是指如果一集依τ_2是開集，那末這集依τ_1也是開集. 這裏如果把"開"字換成"閉"字，仍是真的.

3) 依定理2的5)，為了拓撲結構τ_1比拓撲結構τ_2精，必須且只須對於E中每一點x，x的每一個在E_{τ_2}中的鄰域必也是它在E_{τ_1}中的鄰域.

4) 依定義1，拓撲結構τ_1比拓撲結構τ_2精的必要與充分條件，乃是每個依τ_1收斂於一點的半序點列必然依τ_2也收斂於同一極限.

5) 由這裏的註3)，不難看出，§1 定義1下例2的拓撲結構所以叫作最粗的，乃是因為它確是在一個集上所能定義的一切拓撲結構中之最粗的一個. 同理，散拓撲結構乃是定義在一集上的最精的拓撲結構. 這是兩種極端的情形.

6) 設f是由集E到一拓撲空間E_1中的映像，並設$\mathfrak{O}_1$是E_1中一切開集組成的集族，那末$\overset{-1}{f}(\mathfrak{O}_1) \equiv \mathfrak{O}$是$E$中一個子集族，並且不難看出它滿足 §1 中定理9的條件O_1—O_2. 因此可以用$\mathfrak{O}$在E上定義一個拓撲結構，而E變成一個拓撲空間，表示成E_f. 不難看出，f是由E_f到E_1中的連續映像，並且這一拓撲結構乃是E上能使f為連續映像的最粗的拓撲結構. 這種定義拓撲結構的方法是很有用的，換句話說，E_f也可定義如下：設$x_\delta \in E(\delta \in \varDelta)$，所謂半序點列$\{x_\delta\}$在$E_f$中收斂於$x_0 \in E$，是指$\{f(x_\delta)\}$在$E_1$中收斂於$f(x_0)$. 如果$E_1$是由一個點所組成的，那末$E_f$就是最粗的拓撲結構.

定義 4. 設A是拓撲空間E的子集. 對於A中每個點x，令$\mathfrak{V}_A(x) \equiv \{V \cap A \mid V \in \mathfrak{V}(x)\}$，其中$\mathfrak{V}(x)$表示$x$在$E$中的鄰域組. 取$\mathfrak{V}_A(x)$作為$x$在$A$中的鄰域組，那末$A$成為拓撲空間，這個空間叫作$E$

的子空間，而A上這樣定義的拓撲結構叫作由E上的拓撲結構誘導出來的。

註．1）不難證明，$\mathfrak{B}_A(x)$確實滿足§1定義1的V_1—V_4.

2）不難看出，集A上的這個誘導出來的拓撲結構也可以定義如下：命$\mathfrak{O}_A = \{O \cap A | O \in \mathfrak{O}\}$，其中$\mathfrak{O}$表示$E$的開集族，並取$\mathfrak{O}_A$作爲$A$的開集族.

定理 3. 設A是拓撲空間E中的一個點集，而φ是由A到E中的映像$\varphi(x) = x (x \in A)$，那末從E的拓撲結構誘導出來的A的拓撲結構也正是由映像φ依定義3下註6中所定義的拓撲結構.

證．事實上，如果O是E中的開集，那末

$$\overset{-1}{\varphi}(O) = A \cap O.$$

定義 5. 設$\{E_\iota\}_{\iota \in I}$是一族拓撲空間．考察一切元

$$x = \{x_\iota\}_{\iota \in I} \quad (x_\iota \in E_\iota)$$

的集，這集叫作諸集E_ι的積集$E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$．$E$上使一切投影映像$f_\iota$: $x \to x_\iota$爲連續映像的最粗拓撲結構叫作諸E_ι上拓撲結構的積，而在E上附以這個拓撲結構而得出的拓撲空間E叫作諸空間E_ι的積空間，仍表示成$E = \Pi_{\iota \in I} E_\iota$．諸空間$E_\iota$叫作$E$的因子空間．如果諸$E_\iota$都等於同一空間$E_0$，那末$\Pi_{\iota \in I} E_\iota$叫作$E_0$的冪，表示成$E_0^I$.

註 1．注意，定義5所說的那個最粗拓撲結構確實存在．實際上，考察E上一切使諸投影映像$f_\iota(\iota \in I)$都爲連續映像的拓撲結構所組成的集T，T不是空集，因爲至少E上散拓撲結構必屬於T．T依照"粗於"關係成爲一個半序集．命$\mathfrak{O}_\tau$表示與拓撲結構$\tau \in T$相應的開集族，那末不難看出

$$\mathfrak{O} = \bigcap_{\tau \in T} \mathfrak{O}_\tau$$

仍滿足O_1—O_2，從而決定E上一個拓撲結構τ_0．由於對每個E_ι中的開集G_ι，$\overset{-1}{f_\iota}(G_\iota) \in \mathfrak{O}_\tau$對每個$\tau \in T$成立，所以$\overset{-1}{f_\iota}(G_\iota) \in \mathfrak{O}$，從而$f_\iota$按$\tau_0$是連續的，這就是說，$\tau_0$也是使一切$f_\iota$爲連續的．$\tau_0$比一切$\tau \in T$爲粗，而且$E$上每個比一切$\tau \in T$爲粗並使一切$f_\iota$爲連續的拓撲結構一

定比 τ_0 精，τ_0 正是 T 中的最粗元。

註 2. 注意這裏定義拓樸結構的方式與定義 3 下註 6 中所述的方式的類似性，那裏只有一個映像，而這裏所論的是一族映像。

定理 4. 爲了 $E=\Pi_{\iota\in I}E_\iota$ 是諸拓樸空間 $E_\iota(\iota\in I)$ 的積空間，必須且只須 E 中開集族 $\mathfrak{O}$ 由一切如下的集的併集組成：

$$O=O_{\iota_1}\times O_{\iota_2}\times\cdots\times O_{\iota_n}\times\prod_{\iota\neq\iota_k}^{K=1,\cdots,n}E_\iota,$$

這裏 $\{\iota_1,\cdots,\iota_n\}$ 是 I 中任意有窮子集。

證. 設 O_ι 是 E_ι 中任意開集. 由定義 5 及定理 2 的 2)，$\overset{-1}{f_\iota}(O_\iota)=$ $=O_\iota\times\prod_{\substack{K\neq\iota\\K\in I}}E_K$ 是 E 中一個開集，從而任意有窮多個這樣集的交，也就是說，如 $O_{\iota_1}\times\cdots\times O_{\iota_n}\times\prod_{\iota\neq\iota_k}^{1\leqslant k\leqslant n}E_\iota$ 狀的集，必是 E 中開集. 於是這樣形狀的集的併也是開集. 但這樣形狀的集的併集的全體 $\mathfrak{O}$ 本身已經形成一個滿足 O_1—O_2 的集族，從而 $\mathfrak{O}$ 在 E 上規定一個拓樸結構，使一切 f_ι 依這拓樸結構都是連續映像（見本證明的前半段）. 所以這個拓樸結構恰是使一切 f_ι 爲連續的最粗拓樸結構.

定理 5. 設 $E=\Pi_{\iota\in I}E_\iota$ 是諸拓樸空間 E_ι 的積空間，而 $x=$ $=(x_\iota)_{\iota\in I}$ 是 E 中任意一點，那末作下列形狀的集組成 x 的一個基本鄰域：

$$U=U_{\iota_1}\times\cdots\times U_{\iota_n}\times\prod_{\iota\neq\iota_k}^{1\leqslant k\leqslant n}E_\iota,\tag{1}$$

這裏 $\{\iota_1,\cdots,\iota_n\}$ 是 I 中任意有窮子集，U_{ι_k} 是 x_{ι_k} 在 E_{ι_k} $(1\leqslant k\leqslant n)$ 中的任意鄰域。

證. 設 U 是形狀如 (1) 的集. 依 §1 定理 10，在 E_{ι_k} 中有一開集 $O_{\iota_k}(1\leqslant k\leqslant n)$，使

$$x_{\iota_k}\in O_{\iota_k}\subset U_{\iota_k}.$$

所以，如果命

$$O = O_{\iota_1} \times \cdots \times O_{\iota_n} \times \prod_{\iota \neq \iota_k}^{1 \leqslant k \leqslant n} E_\iota,$$

那末 $U \supset O \ni x$，而依定理 4 O 是 E 中的開集．因此，依 §1 定理 10、U 是 x 的鄰域．

設 V 是 x 在 E 中的任意鄰域．依定理 4 及 §1 定理 9，E 中必有一開集

$$O = O_{\iota_1} \times \cdots \times O_{\iota_n} \times \prod_{\iota \neq \iota_k}^{1 \leqslant k \leqslant n} E_\iota,$$

使 $x \in O \subset V$．但這樣必然 $x_{\iota_k} \in O_{\iota_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$，從而 O_{ι_k} 是 x_{ι_k} 在 E_{ι_k} 中的鄰域 $(1 \leqslant k \leqslant n)$ (§1，定理5)．所以，O 也是形狀如(1)的集，從而如(1)的諸集形成 x 的一個基本鄰域組．

例．n 維歐幾里得空間 R^n 就是 n 個數直綫的積空間．

註．由定義 5 及定理 4，定理 5，不難看出，如果拓撲空間 E_ι 與空間 E_ι^* 同胚($\iota \in I$)，那末積空間

$$E = \Pi_{\iota \in I} E_\iota \quad 與 \quad E^* = \Pi_{\iota \in I} E_\iota^*$$

也是同胚的．因此，在定義一個拓撲空間 E_0 的冪 E_0^I 時，也可以說它是諸空間 E_ι 的積空間，其中每個 E_ι 與 E_0 同胚．

定理 6. 爲了在積空間 $E = \Pi_{\iota \in I} E_\iota$ 中半序點列 $x^{(\alpha)} \equiv (x_\iota^{(\alpha)})$ 收斂於 $x = (x_\iota) \in I$ (這裏 $\alpha \in A$，A 是定向半序集)，必須且只須對於每個 $\iota \in I$，$x_\iota^{(\alpha)} \underset{(\alpha)}{\rightarrow} x_\iota$．

證．爲了 $x^{(\alpha)} \rightarrow x$，必須且只須對於 x 的每個如(1)的鄰域 U，必存在 $\alpha_U \in A$，使 $\alpha \succ \alpha_U \Longrightarrow x^{(\alpha)} \in U$．$U$ 既然是形狀如 (1) 的，上述條件與下列條件等價：對於每個 ι 及 x_ι 在 E_ι 中的每個鄰域 U_ι，必存在一個 $\alpha = \alpha^{(\iota)}$，使

$$\alpha \succ \alpha^{(\iota)} \Longrightarrow x_\iota^{(\alpha)} \in U_\iota,$$

因爲每個 U 只對應有窮多個 $U_\iota \neq E_\iota$，而如

$$\alpha \succ \alpha^{(\iota_k)} \Longrightarrow x_{\iota_k}^{(\alpha)} \in U_{\iota_k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

那末依定向半序集的定義，存在 $\alpha_0 \in A$，使 $\alpha_0 \succ \alpha^{(\iota_k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$，從而

$$\alpha > \alpha_0 \Longrightarrow x_{\iota_k}^{(\alpha)} \in U_{\iota_k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \quad \text{即 } x^{(\alpha)} \in U.$$

例．設X是任意集，$f(x)$是定義於X上的一個實值函數，一切這樣的函數$f(x)$組成集R^X．在R^X上附以積空間的拓撲結構，那末R^X中半序"函數列"$\{f_\delta\}$的收斂於f，就是指"逐點收斂"：$f_\delta(x) \to f(x)$（每個$x \in X$）．

特別如$X = R$，這就是數學分析中函數列的逐點收斂．

定理 7. 設f_ι是由拓撲空間E_1到拓撲空間E_ι中的一個映像，而$f = (f_\iota)$是由E_1到積空間$E_2 = \prod_{\iota \in I} E_\iota$中的映像，使

$$f(x) = (f_\iota(x))_{\iota \in I} \quad (x \in E_1).$$

爲了f在點$a \in E_1$處連續，必須且只須對於每個$\iota \in I$，f_ι在a處連續．

證．爲了f在a處連續，必須且只須對於E中每個收斂於a的半序點列(x_α)，$f(x_\alpha) \to f(a)$．依定理 6，這條件與下列條件等價：對於每個$\iota \in I$，$f_\iota(x_\alpha) \to f_\iota(a)$，這正是說，每個$f_\iota$（$\iota \in I$）在點$a$處連續．

定理 8. 在積空間$E = \Pi_{\iota \in I} E_\iota$中，積集$A = \Pi_{\iota \in I} A_\iota$（$A_\iota \subset E_\iota$）的閉包是諸$A_\iota$的閉包的積，即$\overline{A} = \Pi_{\iota \in I} \overline{A}_\iota$．

證．爲了點$a = (a_\iota) \in \overline{A}$，必須且只須$A$中有一半序點列$x^{(\alpha)} = (x_\iota^{(\alpha)})$收斂於$a$．但如果有這樣的點列，那末$(x_\iota^{(\alpha)})$是$E_\iota$中半序點列，並且依定理 6，$x_\iota^{(\alpha)} \to a_\iota$，從而$a_\iota \in \overline{A}_\iota$（$\iota \in I$）．所以得知$a \in \Pi \overline{A}_\iota$，即$\overline{A} \subset \prod_{\iota \in I} \overline{A}_\iota$．反之，如果$x = (x_\iota) \in \prod_{\iota \in I} \overline{A}_\iota$，那末每個$x_\iota$的每個鄰域$U_\iota$與$A_\iota$相交，而依定理 5，$x$的每個鄰域與$A$相交，從而$x \in \overline{A}$．證完．

系. 爲了積集ΠA_ι在積空間ΠE_ι中（$A_\iota \subset E_\iota$）是閉集，必須且只須對於每個$\iota \in I$，A 在E_ι中是閉的．

定義 6. 拓撲空間的基的最小勢叫作空間的權數．

例．數直綫的權數是$\aleph_0$，因爲以有理數爲端點的開區間組成一個基，而這基的勢等於$\aleph_0$．顯然不存在勢更小的基．

註．不難看出（定義 4），一個拓撲空間的子空間的權數不超過原空間的權數．

定理 9 (Перельман[1]). 設拓撲空間E是一組拓撲空間E_ι的積空間，$E=\Pi_{\iota\in I}E_\iota$;並設每個因子空間$E_\iota$的權數$>1$，而這些權數的和是無窮的，那末積空間$E$的權數等於諸因子空間的權數之和.

證. 設$\mathfrak{B}_\iota$是空間E_ι的一個基. 依定理4，如果$G_\iota\in\mathfrak{B}_\iota$，形狀如$G_{\iota_0}\times\Pi_{\iota\neq\iota_0,\iota\in I}E_\iota$的集及其有窮交集組成$\Pi_{\iota\in I}E_\iota=E$的一個基. 從而$E$的權數不超過

$$\sum_{\iota\in I}\tau_\iota+\sum_{\substack{\iota\neq K\\ \iota,K\in I}}\tau_\iota\tau_K+\sum_{\substack{\iota,K,\sigma\in I\\ \iota\neq K\neq\sigma\neq\iota}}\tau_\iota\tau_K\tau_\sigma+\cdots. \qquad (2)$$

但因$\tau_1>1$ (一切$\iota\in I$)，而$\Sigma\tau_\iota\geqslant\aleph_0$，所以

$$\Sigma\tau_\iota\leqslant\sum_{\iota\neq K}\tau_\iota\tau_K\leqslant\Sigma\tau_\iota\,\Sigma\tau_K=(\Sigma\tau_\iota)^2=\Sigma\tau_\iota,$$

從而$\sum_{\iota\neq K}\tau_\iota\tau_K=\Sigma\tau_\iota$. 同理(2)中其它各項也都$=\Sigma\tau_\iota$. 但$\sum_{\iota\in I}\tau_\iota\geq I$的勢，所以(2)中的和

$$\Sigma\tau_\iota+\Sigma\tau_\iota\tau_K+\Sigma\tau_\iota\tau_K\tau_\sigma+\cdots\leqslant(I\text{的勢})\times\Sigma\tau_\iota\leqslant(\Sigma\tau_\iota)^2=\Sigma\tau_\iota.$$

但E的任何基必須含形狀如$G_{\iota_0}\times\prod_{\iota\neq\iota_0}E_\iota$的集的一切有窮交($G_\iota\in\mathfrak{B}_\iota$)，所以$E$的權數不能$<\Sigma\tau_\iota$. 證完.

例. 特別如果X是無窮集，那末R^X的權數等於X的權數. 又如E是有窮集所成的拓撲空間，而E的權數>1，X是任意無窮集，那末E^X的權數等於X的勢.

註. 1) 如果不設每個因子空間的權數>1，那末定理不必成立. 例如，設每個因子空間只有一點，那末積空間只有一點，從而當因子數目>1時，上述定理在這情形失效.

2) 如果不設諸因子空間的權數之和無窮，那末定理不必成立. 事實上，如果設每個E_ι($\iota\in I$)是含兩個元的散空間，而$I=\{1,2,3\}$，那末$E=E_1\times E_2\times E_3$的權數爲8，而諸$E_\iota$的權數的和爲6.

---

1) Мощности в топологии, Рукопись (1941). 見三十年來的蘇聯數學，拓撲學部分.

§3.　分離性公理 (T_0)，(T_1)，(T_2)

在 §1 中定義了半序點列的收斂，但一直未討論到極限與原來的點列的關係問題．由數學分析中所討論的極限性質，我們應當要求極限滿足下述幾個條件：

1）兩不同點不能在極限上是無區別的，就是說，若 x，y 是空間中兩不同點，必存在半序點列 (x_δ)，$(x_\delta)\to x$ 而 $(x_\delta)\nrightarrow y$，或存在半序點列 (y_δ) $(y_\delta)\to y$ 而 $(y_\delta)\nrightarrow x$；

2）設 x，y 是空間中兩不同點，必存在半序點列 (x_δ)，$x_\delta\to x$ 而 $x_\delta\nrightarrow y$，同時存在半序點列 (y_δ)，$y_\delta\to y$ 而 $y_\delta\nrightarrow x$；

2′）如果半序點列 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 滿足 $x_\delta\equiv x_0(\delta\in\Delta)$，那末 x_δ 收斂於 x_0，並且只收斂於 x_0；

（可證 2）與 2′）等價，見下面定理 4 與定理 4′）

3）收斂半序點列的極限是一意確定的．

但如果對拓撲空間的概念不加進一步的條件，那末上述的三個條件可能都不滿足．

例 1.　取 E 是任意含兩個以上點的集，附以最粗的拓撲結構，那末 E 中任意半序點列收斂於任意點．

例 2.　取實數集 R，定義其中每點 a 的鄰域爲包含區間 $]-\infty, a]$ 的任意數集，那末得出的拓撲空間表示成 R^-．對於兩個不同點 a，b，無妨設 $a<b$，那末完全由 $=b$ 的點組成的半序點列收斂於 b，而不收斂於 a．但完全由 $=a$ 的點所組成的半序點列既收斂於 a，也收斂於 b．

例 3.　考察 §2 定義 1 下例 3 中所舉的空間．設 $\{x_\delta\}$ 是任意完全由點 a 組成的半序點列，而 $b\neq a$，那末 $C\{a\}$ 是 b 的一個鄰域，並且不含點列 $\{x_\delta\}$ 中的任意點．所以點列 $\{x_\delta\}$ 不收斂於 b，這就是說，$\{x_\delta\}$ 只收斂於 a．但由 §2 定義 1 下例 3 所說，一般收斂半序點列的極限不是一意的．

例 4.　數直綫上的收斂半序點列的極限是一意決定的（證明請讀

者補足).

分析一下上舉各例的不同,可以把關於空間的定義中諸條件加强,而得出一串所謂"分離性公理"(T_0),(T_1),(T_2).

定義 1. 拓撲空間叫作(T_0)型(或稱 Колмогоров 型)空間,是指任意取其中兩點,必至少有一點的一個鄰域不包含第二個點.

例. 上面例 2 的空間即是(T_0)型的,而例 1 中的拓撲空間不是(T_0)型的. 一個最簡單的(T_0)型空間是由兩個元$\{0, 1\}$組成的,其中開集族 $\mathfrak{O}$ 由 ϕ, $\{0\}$, $\{0, 1\}$三個集組成. 這個空間在後面經常表示成 B_1.

定理 1. 爲了拓撲空間E是(T_0)型的,必須且只須其中不能有如下的點偶 a 與 b ($a \neq b$): 凡收斂於 a 的點列必也收斂於 b, 並且凡收斂於 b 的點列必也收斂於 a.

證. 1) 必要性. 設 $a \neq b$ ($a, b \in E$). 依(T_0)型空間的定義,無妨設 a 有一鄰域 V 不包含 b, 那末完全由點 b 組成的任意半序點列收斂於 b,但不收斂於 a.

2) 充分性. 設空間不是(T_0)型的,那末存在兩點 a, b, $a \neq b$, 使 b 的每個鄰域必包含 a, 而 a 的每個鄰域也必包含 b. 依 §1 定理 10 下註 1, 可知含 a 的開集同時組成點 a 的基本鄰域組,也組成點 b 的基本鄰域組. 所以凡收斂於 a 的半序點列也必收斂於 b, 且凡收斂於 b 的點列也必收斂於 a.

定理 2. (T_0)型空間的子空間仍是(T_0)型空間. 爲了一組拓撲空間的積空間是(T_0)型的,必須且只須每個因子空間是(T_0)型的.

證. 由定義及定理 1 直接導出.

定理 3. 爲了拓撲空間E是(T_0)型空間,必須且只須E同胚於定義 1 下例中空間 B_1 的某一冪的一個子空間.

註. 由此一切(T_0)型空間的結構完全清楚了.

證. 充分性由定理 2 直接導出. 我們現在只須證明必要性,也就是說,每個(T_0)型空間E必同胚於 B_1 的某一冪的一個子空間.

取E的一個基 $\mathfrak{B}$. 對於每個 $G \in \mathfrak{B}$, 令

$$f_G(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x \in G, \\ 1 & \text{如果 } x \notin G, \end{cases}$$

於是 $f = (f_G)_{G\in\mathfrak{B}}$（就是映像 $f(x) = (f_G(x))_{G\in\mathfrak{B}}$）把 E 映到積空間 $B_1^{\mathfrak{B}}$ 中去.

f 是一對一的. 事實上，如果 $x \neq y$, $x, y \in E$, 那末 x 與 y 這兩點中至少有一個，無妨設是 x，有一鄰域不包含點 y. 依照基的定義，必存在 $G_0 \in \mathfrak{B}$, 使 $x \in G_0$ 而 $y \notin G_0$, 也就是說，$f_{G_0}(x) = 0$, $f_{G_0}(y) = 1$, 從而 $f(x) \neq f(y)$.

f 是連續的. 依 §2 定理 7, 只須證明每個 $f_G(G \in \mathfrak{B})$ 是連續的. 依 §2 定理 2, 只須證

$$\overset{-1}{f_G}(\phi) = \phi, \overset{-1}{f_G}(\{0,1\}) = E, \overset{-1}{f_G}(\{0\})$$

都是 E 中的開集，也就是說，只須證明 $\overset{-1}{f_G}(\{0\})$ 是 E 中的開集，而這是顯然的，因為 $\overset{-1}{f_G}(\{0\}) = G$.

最後證明 $\overset{-1}{f}$ 是連續的. 依 §2 定理 2，只須證明對於 E 中每個開集 O, $f(O)$ 是 $B_1^{\mathfrak{B}}$ 中的開集. 依基的定義，存在一組開集 $G_\iota \in \mathfrak{B}(\iota \in I)$, 使 $O = \bigcup_{\iota \in I} G_\iota$，所以

$$f(O) = \bigcup_{\iota\in I} f(G_\iota).$$

但

$$f(G_\iota) = \{0\} \times B_1^{\mathfrak{B}\setminus\{G_\iota\}}$$

依 §2 定理 4 是 $B_1^{\mathfrak{B}}$ 中開集，所以依 O_1, $f(O)$ 也是開集. 證完.

定義 2. 設具有一個固定屬性的一切拓撲空間組成一類 $\mathfrak{K}$. 設拓撲空間 E_0 屬於 $\mathfrak{K}$, 而 $\mathfrak{K}$ 中每個空間同胚於 E_0 的一個子空間，那末 E_0 叫作類 $\mathfrak{K}$ 的萬有空間.

例. 由定理 3 可知 B_1^X 是具有權數 $\leqslant \{X\text{的勢}\}$ 的 (T_0) 空間類中的萬有空間.

定義 3. 拓撲空間 E 叫作 (T_1) 型的（或叫作 Riesz-Fréchet 空間，或稱迫接空間 (espace accessible)），是指任取 E 中兩個不同點 x 與 y, x 必有一鄰域不包含 y，而 y 也有一鄰域不包含 x.

例．本節開始時所舉的例 2 中的空間是 (T_0) 型而非 (T_1) 型的空間，而例 3 與例 4 中的空間都是 (T_1) 型的。

定理 4. 為了拓撲空間 E 是 (T_1) 型的，必須且只須對於 E 中任二不同的點 x, y，存在半序點列 (x_δ)，$x_\delta \to x$ 而 $x_\delta \not\to y$，同時存在半序點列 (y_δ)，$y_\delta \to y$ 而 $y_\delta \not\to x$。

證．1) 必要性．由定義 3 知，有 $U \in \mathfrak{V}(y)$，$U \not\ni x$，同時有 $V \in \mathfrak{V}(x)$，$V \not\ni y$．作 (x_δ)，$x_\delta \equiv x$，則 $x_\delta \to x$ 而 $x_\delta \not\to y$；作 (y_δ)，$y_\delta \equiv y$，則 $y_\delta \to y$ 而 $y_\delta \not\to x$。

2) 充分性．如 E 不是 (T_1) 型的，這時對於任意開鄰域 $V \in \mathfrak{V}(x)$ 必定 $V \ni y$，或者對於任意開鄰域 $U \in \mathfrak{V}(y)$，必定 $U \ni x$．如前者成立，則對任一半序點列 (y_δ)，$y_\delta \to y$．取開鄰域 $V \in \mathfrak{V}(x)$，因為 $V \ni y$ 所以 V 也是 y 的開鄰域，因此存在 δ_0，當 $\delta > \delta_0$ 時有 $y_\delta \in V$，從而 $y_\delta \to x$．這樣得到凡收斂於 y 的半序點列必定收斂於 x；如後者成立，同理可得凡收斂於 x 的半序點列必定收斂於 y，這是與假設矛盾的。

定理 4′. 為了拓撲空間 E 是 (T_1) 型的，必須且只須凡由一個點 a 所組成的半序點列 $\{a_\delta\}$ $(a_\delta = a)$ 以 a 為唯一極限。

證．1) 必要性．設 E 是 (T_1) 型空間，而設 a, b 是其中兩個不同點，依定義 3，b 有一鄰域不包含 a，從而半序點列 $\{a_\delta\}$ $(a_\delta \equiv a)$ 不能收斂於 b．所以 $\{a_\delta\}$ 的唯一極限是 a。

2) 充分性．設 E 不是 (T_1) 型空間，那末依定義 3，必存在兩不同點 a, b，使 b 的任意鄰域包含 a，從而由一個點 a 所組成的任意半序點列 $\{a_\delta\}$，$(a_\delta \equiv a)$ 必也收斂於 b。

系． 為了一個拓撲空間是 (T_1) 型的，必須且只須凡由一個點組成的集是閉集。

定理 5. 為了一組拓撲空間的積空間是 (T_1) 型的，必須且只須每個因子空間是 (T_1) 型的。

證．由定理 4 的系及 §2 定理 8，可以直接推出。

註 1．依定義，凡 (T_1) 型空間必是 (T_0) 型的，但反之不真．這在定義 3 下的例中已經看出。

註 2. 權數不超過一定基數的(T_1)型空間類的萬有空間的存在問題，直到目前還是未解决的.

註 3. 定義 1 下例說明，有有窮非散的(T_0)型空間存在. 但可以證明，有窮(T_1)型空間必是散的. 實際上，由定理 5 得知，凡由一個點組成的集$\{a\}$是閉集，從而它的補集是開集. 於是依 O_2 一切有窮子集都是開集.

註 4. 如果集E附以拓撲結構 τ_1 時是(T_i)型空間 $(i = 0, 1)$，而 τ_2 是比 τ_1 更精的拓撲結構，那末E附以 τ_2 時仍是(T_i)型的$(i = 0, 1)$.

定義 4. 拓撲空間E叫作(T_2)型的(或 Haussdorff 的)，是指對於E中任意兩個不同點 x, y，必有 x 的一個鄰域U及 y 的一個鄰域V，使$U \cap V = \phi$.

註. (T_2)型空間也必是(T_1)型的.

例. 本節開始處例 4 中的空間是(T_2)型的，但例 3 中的空間不是(T_2)型的. 所以(T_1)型空間不必是(T_2)型的.

定理 6. 爲了拓撲空間E是(T_2)型的，必須且只須其中每個收斂半序點列的極限是一意的.

證. 1) 充分性. 設E是(T_2)型的，而設半序點列 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 收斂於點 x 及點 y，這裏 $x \neq y$，依假定存在 x 的一個鄰域U及 y 的一個鄰域V，使$U \cap V = \phi$. $\{x_\delta\}$既然收斂於 x 及 y，必存在 $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$，使

$$\delta \succ \delta_1 \Longrightarrow x_\delta \in U, \quad \delta \succ \delta_2 \Longrightarrow x_\delta \in V,$$

而因Δ是定向半序集，必存在 $\delta_0 \in \Delta$，使 $\delta_0 \succ \delta_1$, $\delta_0 \succ \delta_2$.
所以

$$\delta \succ \delta_0 \Longrightarrow x_\delta \in U \cap V,$$

得出矛盾. 於是極限的一意性證完.

2) 必要性. 設空間E不是(T_2)型的，那末必存在兩個不同點 x 及 y，使 x 的任意鄰域與 y 的任意鄰域相交，這就是說，對於每個$U \in \mathfrak{B}(x)$及每個 $V \in \mathfrak{B}(y)$，可以取元 $z_{(U,V)} \in U \cap V$. 今定義$\{U_1, V_1\} \succ \{U_2, V_2\}$，是指 $U_1 \subset U_2$ 而且 $V_1 \subset V_2$，那末 $\{(U, V)\}_{U\in\mathfrak{B}(x), V\in\mathfrak{B}(y)}$ 是定向半序集. 於是$\{z_{(U,V)}\}$是一半序點列，它既收斂於 x，也收斂於 y.

定理 7. 爲了拓撲空間E是(T_2)型的，必須且只須在冪空間$E\times E$中，對角集$\Delta=\{(x,x)\mid x\in E\}$是閉集.

證. 由§2的定理6與本節的定理6直接推出.

定理 8. (T_2)型空間的子空間仍是(T_2)型的. 爲了一組拓撲空間的積是(T_2)型的，必須且只須每個因子空間是(T_2)型的. 如果集E上附以拓撲結構τ_1時是(T_2)型的，而τ_2是較τ_1精的拓撲結構，那末E上附以拓撲結構τ_2時也是(T_2)型的.

證. 證明很容易，請讀者自己補足.

定理 9. 爲了拓撲空間E是(T_2)型的，必須且只須對於E中任意兩個不同點a及b，必存在一個由含a, b的某開集A到一(T_2)型空間E_1中的連續映像f，使$f(a)\neq f(b)$.

證. 必要性是不足道的，因爲只須取$A=E=E_1$，而取f爲不變映像就够了. 我們現在證明其充分性. 依(T_2)空間的定義及§1定理10，必存在$f(a)$的開鄰域U_1與$f(b)$的開鄰域V_1，使$U_1\cap V_1=\phi$. 這樣$\overset{-1}{f}(U_1)$與$\overset{-1}{f}(V_1)$各是A中的開集，而A既然是E中的開集，依§2定義4下註2，$\overset{-1}{f}(U_1)$與$\overset{-1}{f}(V_1)$也是E中的開集，並且$\overset{-1}{f}(U_1)\cap\overset{-1}{f}(V_1)=$ $=\phi$, $a\in\overset{-1}{f}(U_1)$, $b\in\overset{-1}{f}(V_1)$. 因此，E是(T_2)型的.

定義 5. 設E是一個拓撲空間，$\mathfrak{R}$是集E上一個等價關係. 令$E/\mathfrak{R}$表示E依$\mathfrak{R}$的剩餘類的集，令$f_{\mathfrak{R}}$表示由E到$E/\mathfrak{R}$上並使每個$x(\in E)$映成x依$\mathfrak{R}$的剩餘類的映像(叫作$\mathfrak{R}$的典範映像). $E/\mathfrak{R}$上使$f_{\mathfrak{R}}$爲連續映像的最精拓撲結構叫作E的拓撲結構依照關係$\mathfrak{R}$的商拓撲結構，而$E/\mathfrak{R}$上附以這樣的拓撲結構時叫作E依$\mathfrak{R}$的商拓撲空間，仍用$E/\mathfrak{R}$表示.

例 1. 在數直綫R中考察等價關係$\mathfrak{R}$: $x\equiv y \pmod 1$. 商空間$R/\mathfrak{R}$即是單位圓周附以平常的拓撲結構而成的拓撲空間，這就是說，我們把R中凡相差爲整數的點等同起來.

例 2. 在R^2中考察等價關係$\mathfrak{R}$: $(x_1, y_1)\equiv(x_2,y_2) \pmod{(1, 1)}$ (即指$x_1-y_1\equiv 0\equiv x_2-y_2 \pmod 1$)，這裏$(x_i, y_i)$表示$R^2$中點的

笛卡爾坐標．這時所得的商空間 $R^2/\mathfrak{R}$ 叫作環面．

註 1. 我們說，商空間 $E/\mathfrak{R}$ 是由在 E 中把依 $\mathfrak{R}$ 等價的點等同而得出來的．這種過程叫作“等同”（Identifizierung）．

註 2. 因爲 $f_{\mathfrak{R}}$ 是連續的，如果 $f(B) = A \subset E/\mathfrak{R}$（這裏 $B \subset E$）是商空間中的開集，那末 $\overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(A)$ 是開集．注意一般 $\overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(A)$ 不必等於 B，而是由把 E 中凡依等價關係 $\mathfrak{R}$ 與 B 中某點等價的點添加入 B 而得出的，簡稱作 B 的**飽和集**．因爲 $E/\mathfrak{R}$ 上的拓撲結構是使 $f_{\mathfrak{R}}$ 連續的最精的形勢，$E/\mathfrak{R}$ 中的開集除上述者外再沒有其它的了，換句話說，爲了 $A \subset$ $\subset E/\mathfrak{R}$ 是開集，必須且只須 $\overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(A)$ 是開集．關於閉集也有同樣的命題成立．

註 3. 如果在 E 中點列 $\{x_\delta\}$ 收斂於 $x \in E$，那末在 $E/\mathfrak{R}$ 中 $f_{\mathfrak{R}}(x_\delta) \to$ $\to f_{\mathfrak{R}}(x)$．

定理 10. 爲了由商空間 $E/\mathfrak{R}$ 到拓撲空間 E_1 中的映像 g 是在 $E/\mathfrak{R}$ 上連續的，必須且只須由 E 到 E_1 的映像 $g \circ f_{\mathfrak{R}}$ 是連續的．

證．必要性由 §2 定理 1 直接推出．現在證明充分性．取 E_1 中的開集 A．既然映像 $h \equiv g \circ f_{\mathfrak{R}}$ 是連續的，$\overset{-1}{h}(A)$ 是 E 中的開集，也就是說，$\overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(\overset{-1}{g}(A))$ 是 E 中開集，依定義 5 下註 2 可知 $\overset{-1}{g}(A)$ 是 $E/\mathfrak{R}$ 中的開集．A 既是 E_1 中任意開集，所以 g 是連續的．

定理 11. 設商空間是 (T_2) 型的，則在冪空間中，集 $C_{\mathfrak{R}} \equiv \{(x, y) \mid x \equiv y(\mathfrak{R})\}$ 是閉的．如 $C_{\mathfrak{R}}$ 在 $E \times E$ 中是閉的，且 $f_{\mathfrak{R}}$ 把 E 中開集映成 $E/\mathfrak{R}$ 中開集，則 $E/\mathfrak{R}$ 是 (T_2) 型的．

證．1）必要性．設 $(x_\delta, y_\delta) \in C_{\mathfrak{R}}$，$(x_\delta, y_\delta) \to (x, y)$，因爲 $f_{\mathfrak{R}}$ 是連續映像，且有 $x_\delta \to x$，$y_\delta \to y$，所以 $\dot{x}_\delta \to \dot{x}$，$\dot{y}_\delta \to \dot{y}$．由於 $x_\delta \equiv$ $\equiv y_\delta(\mathfrak{R})$，所以 $\dot{x}_\delta = \dot{y}_\delta$，從而 $\dot{x} = \dot{y}$，$(x, y) \in C_{\mathfrak{R}}$，於是 $C_{\mathfrak{R}}$ 是閉集．

2）充分性．設 $\dot{x}, \dot{y} \in E/\mathfrak{R}$，$\dot{x} \neq \dot{y}$，則 $x \not\equiv y(\mathfrak{R})$．因爲 $C_{\mathfrak{R}}$ 是閉的，所以存在開鄰域 $V \in \mathfrak{B}(x)$，開鄰域 $U \in \mathfrak{B}(y)$ 使 V 與 U 中沒有同屬於一等價類的點，因爲 $(x, y) \notin C_{\mathfrak{R}}$．再由關於 $f_{\mathfrak{R}}$ 的假設知，$f_{\mathfrak{R}}(V)$，$f_{\mathfrak{R}}(U)$ 各是 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 在 $E/\mathfrak{R}$ 中的開鄰域且 $f_{\mathfrak{R}}(V) \cap f_{\mathfrak{R}}(U) = \phi$．

§4. 第一與第二可數性公理

在§2中曾考慮過基的概念及有關基的一個定理，本節將對基的問題作進一步的考察。

設E是拓撲空間．在§1的定義9中，曾說明，E中某一開集族$\mathfrak{B}$叫作E的基，是指E中每個開集是$\mathfrak{B}$中一些集的併集．由此可以看出，每個拓撲空間必有基，因爲至少它的一切開集所組成的集族就是一個基．在§2定義6中，又曾規定，所謂拓撲空間E的權數，是指它的基的最小勢（即指基的勢當中最小的那個），這權數表示成τE。

定義1. 如果一拓撲空間E的權數不超過$\aleph_0$，那末E叫作具有可數基的空間，或叫作滿足第二可數性公理的拓撲空間。

第二可數性公理. $\tau E \leqslant \aleph_0$.

例1. 數直綫即是滿足第二可數性公理的。

但須注意，確有不滿足第二可數性公理的空間存在。

例2. 設E是勢大於$\aleph_0$的集，那末E上附以§1定義1下例4的拓撲結構就是一個不滿足第二可數性公理的空間．事實上，設$\{O_n\}$是E中可數多個開集，那末每個CO_n是有窮集，從而$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} CO_n$是可數集．取$x \in CA$［注意$CA$是不空的，因$E$的勢大於$\aleph_0$］，那末$C\{x\}$是一開集，而它不能表示成一些$O_n$的併集．所以$\{O_n\}$不是$E$的基。

定義2. 設E是拓撲空間．所謂E在x點($x \in E$)處的基，是指x的一個基本開鄰域組．E在x點處的基的最小勢叫作E在x點的特徵數，表示成$\chi_x(E)$。

例．數直綫在它的每個點處的特徵數等於$\aleph_0$。

註．如果$\chi_x(E) = \aleph_0$，那末爲了$x \in \bar{A}(A \subset E)$，必須且只須從$A$中的點可以作出一個初等點列$\{x_n\}$來，使

$$x_n \to x.$$

特別這說明爲什麼在論數直綫時我們一般只使用初等點列。

定義3. 所謂拓撲空間E在點x處的僞基，是指由點x的一些鄰域組成的集

組 $\mathfrak{B}_x^*$，使

$$\bigcap_{O\in\mathfrak{B}_x^*} O = \{x\}.$$

E 在點 x 處的偽基的最小勢叫作 E 在點 x 處的偽特徵數，表示成 $\psi_x E$.

註 1. 如果空間 E 是 (T_1) 型的，那末 E 在一點的基同時也是 E 在這點的偽基，從而

$$\psi_x E \leqslant \chi_x E. \tag{1}$$

但在非 (T_1) 型空間的情形，(1) 不必成立.

例. 對於在 §3 開始處例 2 中的空間，$\psi_x E$ 是不確定的，而 $\chi_x E = 1$.

註 2. 爲了對於任意點 x，$\psi_x E$ 存在，必須且只須 E 是 (T_1) 型的. 事實上，在 (T_1) 型空間中，任意點的偽基必存在. 例如，這點的一切鄰域所組成的族就是 E 在這點的偽基. 但在一個 (T_0) 型空間中，可能在某點處沒有偽基.

註 3. 設 E 是 (T_1) 型空間，而 n 是任意自然數，那末

$$\chi_x E = n \Longleftrightarrow \chi_x E = 1 \Longleftrightarrow \psi_x E = n \Longleftrightarrow \psi_x E = 1,$$

而且上列一串等式都與下面的命題等價：即 x 是 E 中孤立點.

註 4. 在 (T_1) 型空間中，既然 $C\{x\}$ $(x\in E)$ 是開集，而

$$\bigcap_{x\neq a,\ x\in E} C\{x\} = \{a\},$$

所以 $\psi_x E$ 不超過 E 的勢.

定義 4. 設 E 是拓撲空間，而對於每點 $x\in E$，

$$\chi_x E \leqslant \aleph_0,$$

那末 E 叫作滿足第一可數性公理.

第一可數性公理. 對於每點 $x\in E$，$\chi_x E \leqslant \aleph_0$.

定理 1. 設 E 是拓撲空間. 由 E 在每一點 x 的每一基 $\mathfrak{B}_x$ 中，可取出一個偽基 $\mathfrak{B}_x^*$ 來，使 $\mathfrak{B}_x^*$ 的勢等於 $\psi_x E$；並且由 $\mathfrak{B}_x$ 中也可取出一個基 $\mathfrak{B}_x^{(1)}$ 來，使 $\mathfrak{B}_x^{(1)}$ 的勢等於 $\chi_x E$.

證. 設 $\mathfrak{B}_x^{**}$ 是空間 E 在點 x 處的一個具有勢 $\psi_x E$（或 $\chi_x E$）的偽基（或相應的，基）. 對於每個 $O_x\in\mathfrak{B}_x^{**}$，可取一 $O_x^{(1)}\in\mathfrak{B}_x$，使 $O_x^{(1)}\subset O_x$. 當 O_x 遍表 $\mathfrak{B}_x^{**}$ 的一切集時，相應的 $O_x^{(1)}$ 組成一個在 x 點處的偽基（或基），它的勢等於 $\psi_x E$（或 $\chi_x E$）. 證完.

註. 在(1)中已指出 $\psi_x E \leqslant \chi_x E$. 我們舉一例證明一般(1)不能換成等式.

例　(Урысон). 設E是數直綫上一切點的集. 對於任意$x \in E$,令凡由含x的一個開區間中取出至多可數多個與x不相同的點以後所得的點集算作x的鄰域. 於是

$$\{]x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}[\}_{n=1,2,\dots}$$

組成E在點x處的一個偽基, 從而不難證明$\psi_x E = \aleph_0$. 爲了證明$\chi_x E \geqslant \mathfrak{c}$(這裏$\mathfrak{c}$表示直綫連續統的勢),注意$\chi_x E \geqslant \aleph_0$, 所以只須證明, 由假定$\chi_x E = \mathfrak{m} < \mathfrak{c}$一定導出矛盾來. 事實上, 由$\chi_x E = \mathfrak{m}$及定理1可取$E$在$x$點的一個基$\mathfrak{B}_x$,使$\mathfrak{B}_x$的勢等於$\mathfrak{m}$, 而$\mathfrak{B}_x$是由$x$在$E$中的鄰域組成, 換句話說, 如果$O \in \mathfrak{B}_x$, 必然$O$是像下面那樣的集:

$$O = U \setminus D_0,$$

其中U是含x的一個開區間, 而D_0是一個由與x不同的至多可數個的點組成的集. $\{D_0\}_{O \in \mathfrak{B}_x}$的併集$A$的勢一定不超過

$$\mathfrak{m}\aleph_0 = \mathfrak{m} < \mathfrak{c},$$

從而$E \setminus A$與任意開區間的交的勢是$\mathfrak{c}$. 於是可取可數集

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \subset E \setminus A,$$

使$x_n \in]x-\frac{1}{n},\ x+\frac{1}{n}[$. 但這樣則$x$的每個鄰域$O \in \mathfrak{B}_x$必含諸$x_n(n=1, 2, \cdots)$中至多除去有窮多個以外的一切點,而這與定義矛盾. 於是得證

$$\chi_x E = \mathfrak{m} > \psi_x E.$$

定理 2. 設拓撲空間E的權數等於$\mathfrak{m}$,那末E的任意基$\mathfrak{B}$必包含一個子集族$\mathfrak{B}^*$,使$\mathfrak{B}^*$的勢是$\mathfrak{m}$,而$\mathfrak{B}^*$也是E的基.

證. 設$\mathfrak{B}_0$是E的一個勢等於$\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$)的基. 令$U$表示$\mathfrak{B}$中的一集. $\mathfrak{B}_0$中集偶(U_α, U_β)叫作特定的,是指存在$V \in \mathfrak{B}$, 使$U_\alpha \subset V \subset U_\beta$. 特定偶的全體的勢不超過$\mathfrak{B}_0$中一切集偶的勢, 而後者等於$\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. 對於每一特定偶$(U_\alpha, U_\beta)$, 取一個滿足上述相含關係的$V \in \mathfrak{B}$, 這樣選定的$V$的族$\mathfrak{B}^*$的勢也$\leqslant \mathfrak{m}$. 我們將證明$\mathfrak{B}^*$是$E$的基,從而$\mathfrak{B}^*$的勢只能等於$\mathfrak{m}$.

取$x \in E$,並取x的任意鄰域O_x. 我們只須證明存在$V_1 \in \mathfrak{B}^*$,滿足$x \in V_1 \subset O_x$.

既然$\mathfrak{B}_0$是基, 必存在$U_\beta \in \mathfrak{B}_0$,使$x \in U_\beta \subset O_x$. 但$\mathfrak{B}$也是基,從而存在$V \in \mathfrak{B}$, 使$x \in V \subset U_\beta$. 再利用$\mathfrak{B}_0$是基這一事實,可取$U_\alpha \in \mathfrak{B}_0$,使$x \in U_\alpha \subset V$. 這樣$(U_\alpha, U_\beta)$成爲一個特定偶, 從而存在$V_1 \in \mathfrak{B}^*$, 使$U_\alpha \subset V_1 \subset U_\beta$, 所以$x \in V_1 \subset O_x$, 而這正是所要證的.

註。如 A 是拓撲空間 E 的子空間,那末 A 的權數顯然不超過 E 的權數. 此外,對於任意 $x\in A$, $\chi_x A \leqslant \chi_x E$, $\psi_x A \leqslant \psi_x E$. 因此,如果空間 E 滿足第一或第二可數性公理,那末其子空間也必滿足第一或第二可數性公理.

§5. 聯通性

定義 1. 拓撲空間 E 叫作聯通的, 是指 E 不能分解成兩個互相沒有公共點(不相交)的不空閉集的併集. 空間 E 中的集 A 叫作聯通集, 是指 A 看作 E 的子空間時, 是聯通空間.

註. 爲了拓撲空間 E 是聯通空間, 必須且只須 E 中除空集及其自己外不包含既開且閉的集. 另一個必要且充分的條件乃是 E 不能分成兩個相補的無緣集, 這裏無緣集就是其緣爲空集的那種集, 見 §1 定理 12.

例 1. R^1 與 R^n $(n>1)$ 都是聯通集.

例 2. §1 定義 1 下例 4 中的空間是聯通的.

例 3. 包含兩個以上點的散空間是不聯通的.

例 4. 只含一個點的集一定是聯通的.

例 5. 爲了數直綫上一點集是聯通的, 必須且只須當它包含任意兩個不同點 a, b $(a<b)$ 時, 它也必包含整個區間 $[a, b]$.

定義 2. 在一拓撲空間 E 中, 兩個不空點集 A, B 叫作隔離的, 是指

$$(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})=\phi. \tag{1}$$

定理 1. 爲了拓撲空間 E 是聯通的, 必須且只須 E 不能是兩個隔離的不空集的併集.

證. 容易看出,

$$(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})=\phi$$

且 $E=A\cup B \Longleftrightarrow \bar{A}\subset A$ 且 $\bar{B}\subset B, E=A\cup B$.

因此, 本定理直接由定義 1 導出.

定理 2 (樊畿). 爲了拓撲空間 E 中的點集 X 是聯通的, 必須且

只須下列條件成立：對於每一點 $x\in X$，隨意固定一個鄰域 V_x。那末對於 X 中任意兩點 a, b, 在 X 中存在有窮多點 $x_1=a, x_2, \cdots, x_n=b$，使

$$X\cap V_{x_i}\cap V_{x_{i+1}}\neq\phi\quad(1\leqslant i\leqslant n-1). \qquad (2)$$

證．1）必要性．首先對於 X 的每一點 x，隨意固定 x 的一個鄰域 V_x．X 中有窮多點 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 叫作（依已選定的鄰域族 $\{V_x\}_{x\in X}$）聯結 x_1 與 x_n（x_1、$x_n\in X$）的鏈，是指(2)成立．取任意 $a\in X$．令 A 表示 X 中凡可以用一鏈聯結到點 a 的點所組成的子集，而令 $B=X\cap\cap CA$，我們證明

$$(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})=\phi.$$

事實上，令 $y\in A\cap\bar{B}$，那末 $B\cap V_y\neq\phi$．取 $z\in B\cap V_y$．既然 $y\in A$，依照 A 的定義，存在一鏈 $\{a, y_2, \cdots, y_{n-1}, y\}$ 聯結 a 與 y．既然 $z\in B\cap\cap V_y\cap V_z\subset X\cap V_y\cap V_z\neq\phi$，所以 a 與 z 被鏈 $\{a, y_2, \cdots, y_{n-1}, y, z\}$ 所聯結，於是 $z\in A$，從而 $z\in A\cap B$，與 B 的定義矛盾．同理，如果設 $y\in\bar{A}\cap B\neq\phi$，那末 $V_y\cap A\neq\phi$．取 $z\in V_y\cap A$，那末必存在一個聯結 a 與 z 的鏈 $\{a, z_2, \cdots, z_{k-1}, z\}$．但 $z\in V_y\cap A\cap V_z\subset V_y\cap V_z\cap X$，所以 $\{a, z_2, \cdots, z_{k-1}, z, y\}$ 是聯結 a 與 y 的鏈．由此可知 $y\in A$，而因已設 $y\in B$，這與 B 的定義矛盾．因此，A 與 B 是 X 中的隔離集．如果 X 是聯通的，那末 A 與 B 兩者之中必有一個是空的．因 $a\in A\neq\phi$，所以 $B=\phi$．條件的必要性證完．

2）充分性．設 X 不是聯通集，依定理1，在 X 中有兩個相對於 X 的隔離不空集 A, B，使 $X=A\cup B$．既然 $A\cap\bar{B}=\bar{A}\cap B=\phi$，從而對於 B 中每一點 x，可取 x 的一個鄰域 V_x，使 $V_x\cap A=\phi$．同理，對於 A 中每一點 x，可以取 x 的一個鄰域 V_x，使 $V_x\cap B=\phi$．取這樣規定的鄰域族 $\{V_x\}_{x\in X}$，取 $a\in A$, $b\in B$，我們證明 a 與 b 不可能被一鏈依照 $\{V_x\}$ 聯結起來．事實上，在一個這樣的鏈中，必有一個 $x_k\in A$，而 $x_{k+1}\in B$．但這樣必然

$$X\cap V_{x_k}\cap V_{x_{k+1}}=(A\cap V_{x_k}\cap V_{x_{k+1}})\cup(B\cap V_{x_k}\cap V_{x_{k+1}})=\phi,$$

所以非聯通集必不滿足定理中的條件．

系 1. 如果A是一拓撲空間E中的聯通集，而$A\subset B\subset\overline{A}$，那末$B$也是聯通集。

證．事實上，B的任意點的任意鄰域必含A的點，從而定理2中的條件對於集B成立。

註．特別，如果空間中有一個稠密集是聯通的，那末整個空間是聯通的。

系 2. 如A，B都是聯通集，而$\overline{A}\cap B\neq\phi$，那末$A\cup B$是聯通集。

證．由定理2之證明中的第1）部分直接推出。

定理 3（樊畿）．為了拓撲空間中的集X是聯通的，必須且只須下面條件成立：對於定義於X上的任意連續函數f及任意正數ε，取X中任意兩點a與b，一定存在X中有窮多個點$x_1=a, x_2, \cdots, x_n=b$，使

$$|f(x_i)-f(x_{i+1})|<\varepsilon \quad (1\leqslant i\leqslant n-1).$$

證．1）必要性．設X是聯通集，而f是X上的連續函數．對於X中每一點x，可以取x的鄰域V_x，使

$$y\in V_x\cap X\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

設$a, b\in X$．依定理2，存在有窮多個屬於X的點$x_1=a, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=b$，使

$$X\cap V_{x_i}\cap V_{x_{i+1}}\neq\phi, \quad (1\leqslant i\leqslant n-1).$$

令$y_i\in X\cap V_{x_i}\cap V_{x_{i+1}}$，那末

$$|f(x_i)-f(x_{i+1})|\leqslant|f(x_i)-f(y_i)|+|f(y_i)-f(x_{i+1})|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故定理中的條件滿足．

2）充分性．設X不是聯通集，必有不空閉集A，B存在，使$A\cup B=X$，而$(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=\phi$．在$x\in A$處，令$f(x)=0$，而在$x\in B$處，令$f(x)=1$，依§2定理2之3)，$f$是$X$上的連續函數，因為$A$，$B$都是相對於$A$（即空間$A$中的）的閉集．取$\varepsilon>0$，$\varepsilon\leqslant1$，而令$a\in A$，$b\in B$，那末滿足定理中條件的點$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$無法找到．條件的充分性證明了．

定理 4. 設A是拓撲空間E中的聯通集，而f是由E到拓撲空間E_1中的連續映像，那末$f(A)$是E_1中的聯通集。

證．設$f(A)=M\cup N$，而$\overline{M}\cap N=\overline{N}\cap M=\phi$，且$M\neq\phi\neq N$，

那末

$$A = (A \cap \overset{-1}{f}(M)) \cup (A \cap \overset{-1}{f}(N)),$$

並且

$$\overline{\overset{-1}{f}(M)} \cap \overset{-1}{f}(N) \neq \phi \Longrightarrow f(\overline{\overset{-1}{f}(M)}) \cap N \neq \phi,$$

也就是說 $\overline{M} \cap N \neq \phi$，與假定衝突．因此得知

$$\overline{\overset{-1}{f}(M)} \cap \overset{-1}{f}(N) = \phi.$$

同理

$$\overline{\overset{-1}{f}(N)} \cap \overset{-1}{f}(M) = \phi.$$

又因 $\overset{-1}{f}(M) \neq \phi \neq \overset{-1}{f}(N)$，與 A 的聯通性矛盾．所以 $f(A)$ 是聯通集．

系． 聯通空間的商空間必是聯通集．

定理 5（W. Sierpiński）．爲了拓撲空間 E 中集 X 是聯通的，必須且只須 X 具有達爾布性質：即如果 $f(x)$ 是定義在 X 上的連續函數，而 $a, b \in X$，那末 $f(x)$ 在 X 上必取 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的一切數值．

註．如果 $E = R$，這是數學分析中的一個熟知定理．

證．1）必要性． 如果 X 是聯通集，而 f 是 X 上的連續函數，那末 $f(X)$ 依定理 4 是數直綫上的聯通集，所以如果 $a, b \in X$，依定義 1 下例 5，$f(x)$ 在 X 上取 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的一切數值．

2）充分性． 我們只須證明由這達爾布條件可以推出定理 3 中的條件． 事實上，取 X 上任意連續函數 f，任意正數 ϵ 及 X 中任意兩點 a, b，依假定，$f(x)$ 在 X 上取 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的一切數值． 無妨設 $f(b) > f(a)$．取正整數 n，使

$$n > \frac{1}{\epsilon}[f(b) - f(a)],$$

那末必存在 $x_i \in X$，使

$$f(x_i) = f(a) + \frac{i}{n}(f(b) - f(a)), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

那末

$$|f(x_i) - f(x_{i+1})| = \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon \ (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

依定理 3, X 是聯通集.

定義 3. 拓撲空間中兩點 a、b 叫作相聯的, 是指在空間中有一個含 a, b 的聯通集存在.

註. 這裏定義的相聯關係是一個等價性關係(即具有自反性、對稱性及傳移性的二項關係), 因而空間 E 可以按照這個關係分成互不相交的子集, 使同一子集中的點是彼此相聯的, 而不同子集中的點是彼此不相聯的.

定義 4. 依照定義 3 下註中所分成的子集叫作空間的聯通分. 包含點 a 的聯通分也叫作 a 在 E 中的聯通分.

註. a 在空間 E 中的聯通分就是由 E 中凡與 a 相聯的點組成者.

定理 6. 拓撲空間中的每一聯通分是閉聯通集.

證. 設 A 是拓撲空間 E 中的一個聯通分, 設 $f(x)$ 是定義在 A 上的任意一個連續函數, 並設 $x, y \in A$, 依定義 3, 存在聯通集 X, 使 X 包含 x, y. X 一定含於 A 中, 否則 X 含一點 $z \notin A$, 那末 x, z 是相聯的, 與聯通分的定義相背. 從而 $f(x)(x \in X)$ 也是定義在 X 上的連續函數, 依定義 5, $f(x)$ 在 X 上取 $f(x)$ 與 $f(y)$ 之間的一切數值. 因此 $f(x)$ 在 A 上也取 $f(x)$ 與 $f(y)$ 之間的一切數值. 既然 $f(x)$ 是定義在 A 上的任一連續函數, 而 x, y 是 A 中任意兩點, 依定理 5, A 的聯通性證明了. 依定理 2 系 1, $\bar{A}$ 也是聯通集. 如果有一點 $a \in \bar{A} \setminus A$, 那末依聯通分的定義, a 與 A 中一點 x 不相聯, 但既然 $\bar{A} \ni x$, $\bar{A} \ni a$, 則 a 與 x 成爲相聯的, 得出矛盾. 從而 $A = \bar{A}$ 是閉集.

系. 爲了一拓撲空間是聯通的, 必須且只須其中任意兩點都是相聯的.

註. 1) 這就是說, 爲了拓撲空間是聯通的, 必須且只須它只有一個聯通分.

2) 設 $A_\iota(\iota \in I)$ 是聯通集, 其中任意兩個是不相隔離的, 那末 $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ 是聯通集. 事實上, 取 $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ 中任意兩點 x, y, 那末必存在 $\iota, K \in I$, 使 $x \in A_\iota$, $y \in A_K$, 既然依定理 2 系 2, $A_\iota \bigcup A_K$ 是聯通集, x 與 y 是相聯的. 依上面的系, $\bigcup_{\iota \in I} A_\iota$ 是聯通的.

定理 7. 為了拓撲空間E是非聯通的，必須且只須存在一個由E到由兩個元組成的散空間$\{a, b\}$上的連續映像.

證. 1) 必要性. 設E是非聯通的，那末$E = M \cup N$，而M與N是互補的、既開且閉的集. 令

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{如果 } x \in M, \\ b & \text{如果 } x \in N, \end{cases}$$

不難看出，f就是滿足定理中條件的映像.

2) 充分性. 設$f(x)$是由E到$\{a, b\}$上的連續映像，那末$\overset{-1}{f}(a)$與$\overset{-1}{f}(b)$就是E中兩個不空的相補閉集.

註. 由定理6的證明的前半，可知如果含點$x(\in E)$的聯通分是A，那末凡含x的既開且閉的集必含A，從而含x的既開且閉的集的交必包含A. 但逆命題不必成立.

例(N. Bourbaki). 設$E = N \cup \{a, b\}$，N是正整數集. 如$x \in N$，令$\mathfrak{V}(x) = \{x\}$，而令

$$S_n' = \{a\} \cup \{x | x \in N, x \geqslant n\},$$
$$S_n'' = \{b\} \cup \{x | x \in N, x \geqslant n\},$$

並令

$$\mathfrak{V}(a) = \{S_n'\}_{n \in N}, \quad \mathfrak{V}(b) = \{S_n''\}_{n \in N}.$$

取$\mathfrak{V}(x)$作x的基本鄰域組，不難驗明，E成為一個拓撲空間. 這空間是一個(T_1)型的，從而$\{a\}$, $\{b\}$都是閉集. 因此$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$分成兩個相隔離閉集，從而$a$的聯通分不包含$b$. 另一方面，設$U$是含$a$的一個既開且閉的集、那末，它既然是開的，必存在一個$n \in N$，使$S_n' \subset \subset U$. 但b的任意鄰域與S_n'相交，從而與U相交，即$b \in \overline{U} = U$. 因此每個含a的既開且閉的集也必含b，從而含a的一切既開且閉的集的交並不等於a的聯通分.

定義 5. 如果一拓撲空間中每個聯通分只含一個點，那末空間叫作全斷的.

註. 1) 依定理6，在全斷的空間中，由一個點組成的集是閉的，從

而它是(T_1)型的.

2) 散空間一定是全斷的,但反之,全斷空間不必是散的.

例. 如果有理數集 Q 看作是數直綫 R 的子空間,那末 Q 不是散空間,但它是全斷的.

定義 6. 拓撲空間 E 叫作 0 維的(零維的),是指其中每點的一切無緣鄰域成爲這一點的基本鄰域組.

註 1. 由定義直接知道,0 維空間的子空間仍是 0 維的,0 維空間的積空間也是 0 維的.

註 2. 在 0 維 (T_1) 型空間中,含每點的既開且閉集的交只含這點. 因此,依定理 7 下註,0 維(T_1)型空間一定是全斷的. 但反之,全斷(T_1)型空間不必是 0 維的(見定理 7 下的例).

註 3. 0 維 (T_0) 型空間必是全斷的. 事實上,設 x 與 y 是空間中兩個不同點,依(T_0)型空間及 0 維空間的定義,無妨設有一個包含 x 的既開且閉的集 O,而 O 不含 y. 但如此 CO 也是一個既開且閉的集,而它包含 y,不包含 x. 因此,包含一點的一切既開且閉集的交只含這一個點,而依定理 7 下的註,這空間的每個聯通分必是只含一個點的,從而空間是全斷的. 特別由此可知,(T_0)型 0 維空間必是(T_2)型的.

註 4. §3 定義 1 下例中引入的 (T_0) 型空間 B_1 不是全斷的(實際上是聯通的),也不是 0 維的.

註 5. 非(T_0)型的 0 維空間不一定是全斷的.

例. 任意一個含兩點以上的附有最粗拓撲結構的空間是 0 維的,同時也是聯通的.

定理 8. 爲了拓撲空間 E 是 (T_0) 型 0 維空間,必須且只須它同胚於積空間 $E=\prod_{\iota\in I} B_\iota$ 的一個子空間,其中每個 B_ι 是只含兩個元的散空間,而標號族的勢等於空間的權數.

證. 充分性由定義 6 下的註直接推出. 現在我們證明必要性. 取 E 中一個由既開且閉集組成的基 $\{O_\iota\}_{\iota\in I}$,這依定義 6 是可能的. 令 $f_\iota(x)$表示集 O_ι 的特徵函數,即令

$$f_\iota(x)=\begin{cases}1 & \text{如果 } x\in O_\iota,\\ 0 & \text{如果 } x\notin O_\iota,\end{cases}$$

f_ι 是由 E 到 $B_\iota=\{0,1\}$ 中的連續映像．令

$$f(x)=\{f_\iota(x)\}_{\iota\in I},$$

那末 f 是由 E 到 $\prod\limits_{\iota\in I}B_\iota$ 中的連續映像(§2 定理 7)． f 是一對一的．事實上，如果 $f(x)=f(y)$，那末 $f_\iota(x)=f_\iota(y)$(一切 ι)，從而每個含 x 的既開且閉集也必含 y，反之也成立，從而依定義 6，$x=y$．

我們還須證 $\overset{-1}{f}$ 是連續的($\overset{-1}{f}$ 是由 $f(E)$ 到 E 上的映像)．取 $O_{\iota_0}\ni x$，而令

$$U=\{\{1\}\times\Pi_{\iota\in I,\,\iota\neq\iota_0}B_\iota\}\cap f(E),$$

那末 U 是 $f(x)$ 的一個鄰域，並且 $\overset{-1}{f}(U)=O_{\iota_0}$，從而 $\overset{-1}{f}$ 是連續的．

定理 9. 具有可數基（也就是說，權數等於 $\aleph_0$ 的）的 (T_0) 型 0 維空間必同胚於 Cantor 三進位間斷統(§1 定義 10 下的例)的一個子集．

證．在定理 8 中，把 I 換成 N(即自然數全體)．令 $\{O_n\}_{n\in N}$ 表示空間的一個基，其中 O_n 是既開且閉集，對於每個點 $x\in E$，令三進位小數所表示的下列實數與它相應：

$$f(x)=0,a_1a_2a_3\cdots,$$

這裏

$$a_n=2f_n(x)\quad (f_n(x)\text{ 是 } O_n \text{ 的特徵函數}),$$

這樣 f 把 E 映像到 Cantor 三進位間斷統 D 中． f 的一對一性由基的定義及 E 的 (T_1) 分離性這一假定得出．

考察 $U_n=\{0,z_1z_2z_3\cdots z_n\cdots: z_i=a_i, 1\leqslant i\leqslant n, z_i=0\text{ 或 }2\}$，那末 $\{U_n\}$ 是 $f(x)$ 在 D 中的基本鄰域組．令 $V_i=O_i$ 或 CO_i，全看 a_i 等於 2 或 0 決定 $(1\leqslant i\leqslant n)$，那末 $V=\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_i$ 是 x 的鄰域，而 $f(V)\subset U_n$．反之，$\overset{-1}{f}(U_n)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_i=V$． 因此 f 與 $\overset{-1}{f}$ 都是連續的．證完．

定理 10. 爲了拓撲空間 $E_\iota(\iota\in I)$ 的積空間 $E=\Pi_{\iota\in I}E_\iota$ 是聯通

的，必須且只須每個因子空間 E_ι 是聯通的。

證．必要部分由定理 4 與 §2 定義 5 直接推出．現在證明充分性．設每個 $E_\iota(\iota\in I)$ 是聯通空間，並設 E 不是聯通的，由定理 7，必存在一個由 E 到 $B=\{0,1\}$ 上的連續映像 f． 令 $a=(a_\iota)$ 是 E 中一點，而 $K\in I$．對於 $x=(x_\iota)\in E$，規定

$$f_K(x_K)=f(y),$$

這裏

$$y_\iota=\begin{cases}a_\iota & \text{如果 } \iota\neq K,\\ x_K & \text{如果 } \iota=K,\end{cases}$$

這樣 f_K 是由 E_K 到 B 中的連續映像．由於 E_K 的聯通性，$f_K(x_K)$ 只取常數值． 對於一切 $x_K\in E_K$，$f_K(x_K)$是固定的，這就是說，如果 y 的諸"坐標"中只有一個與 a 的相應坐標不同，那末 $f(y)=f(a)$． 因此，如果 y 的坐標中只有有窮多個與(a_ι)的相應坐標不同，那末 $f(y)=f(a)$ 也成立． 但取 E 中任意點的任意鄰域，這鄰域可以設作 $\prod\limits_{\iota\in I}V_\iota$ 形的，其中除有窮多個 V_ι 外，其它諸 V_K 等於 E_K，因此，$V_K\ni a_K$ 除有窮多個 $\iota\in I$ 外成立。所以上述的諸點 y（即其坐標除有窮多個以外與相應的 a_ι 相同）在 E 中是稠密的． f 既在這稠密集上是常數值的，而且是連續的，那麼 f 在整個 E 上是常數值的，與假定相背．證完．

定理 11. 設 E 是拓撲空間，而 R 表示 E 中點間的相聯關係，那末商空間 E/R 是全斷的。

證．設 A 是 E/R 中包含至少兩點的閉集，並設 f 表示由 E 到 E/R 上的典範映像，就是說將 E 中每個元映成含它的聯通分的那個連續映像，那末 $\overset{-1}{f}(A)$ 是由 A 依 R 飽和而成的閉集，並且至少含兩個聯通分，所以它不是聯通的． 於是存在兩個在 $\overset{-1}{f}(A)$ 中閉的（從而也是在 E 中閉的）不空集 B 與 C，使

$$B\cap C=\phi,\quad B\cup C=\overset{-1}{f}(A).$$

$\overset{-1}{f}(A)$ 中一點在 $\overset{-1}{f}(A)$中的聯通分與它在 E 中的聯通分相同，而 B 與 C 既是在 $\overset{-1}{f}(A)$ 中既開且閉的，B 與 C 必是依 R 飽和的． 因此 $f(B)$ 與

$f(C)$是閉的 [§3 定義 5 註 2] 非空集，並且

$$f(B)\cup f(C)=A,\quad f(B)\cap f(C)=\phi,$$

從而A是不聯通的。定理證完。

定理 12. 在積空間 $E=\Pi_{\iota\in I}E_\iota$ 中，一點 $x=(x_\iota)$ 的聯通分是這點諸坐標在各相應因子空間中的聯通分的積集。

證. 依定理 10 及定理 6，諸聯通分之積仍是聯通集。設A是E中含x的聯通集，那末[1] $\mathrm{pr}_\iota(A)$ 是 E_ι 中含 x_ι 的聯通集（定理 4）。容易看出，

$$A\subset\prod_{\iota\in I}\mathrm{pr}_\iota(A),$$

所以A含於諸 x_ι 的聯通分的積中。證完。

定義 7. 拓撲空間E叫作局部聯通的，是指E的每點有一組由聯通鄰域形成的基本鄰域組。

例 1. 數直綫是局部聯通的。

註 1. 如果拓撲空間中每點有一個聯通鄰域，並不一定它就是局部聯通的，所以聯通空間未必是局部聯通的。

例 2. 在數平面上，當 a 是有理數時，令

$$S_a=\{(x,y)\,|\,x=a,\ 0<y\leqslant 1\},$$

而當 a 是無理數時，

$$S_a=\{(x,y)\,|\,x=a,\ -1\leqslant y\leqslant 0\};$$

令

$$E=\bigcup_{a\in R}S_a,$$

那末E作爲平面中的子空間是聯通的，但不是局部聯通的。

註 2. 局部聯通空間也未必是聯通的。

例 3. 考察R上點集

$$E=]-1,0[\ \cup\ ]0,1[,$$

並把E看成R的子空間，那末E是局部聯通的，但不是聯通的。

定理 13. 爲了拓撲空間E是局部聯通的，必須且只須每個不空開

---

[1] $\mathrm{pr}_\iota(A)$表示集A在因子空間 E_ι 中的投影。

集中的聯通分都是開集。

證. 1) 充分性. 如果條件滿足,那末任意一點 x 在它的任意開鄰域中的聯通分就是 x 的一個聯通鄰域。

2) 必要性. 設 E 是局部聯通空間,而 A 是其中一個不空開集,B 是 A 中一個聯通分,x 是 B 中一點,並設 V 是含於 A 中的 x 的一個聯通鄰域,依定理 6 下註 2),$V\cup B$ 是含在 A 中的聯通集,並且包含 B. 依聯通分的定義,必然 $V\cup B\subset B$,從而 $V\subset B$. 所以 B 的任意一點 x 是它的內點,於是證明了 B 是開集。

註. 因此,並依定理 6, 一局部聯通空間 E 的每一聯通分是 E 中既開且閉的集。

定理 14. 為了積空間 $E=\Pi_{\iota\in I}E_\iota$ 是局部聯通的,必須且只須每個因子空間是局部聯通的,並且其中至多除有窮多個以外都是聯通的。

證. 1) 必要性. 如 V_K 是 $a_K\in E_K$ 的鄰域,集 $V=V_K\times\Pi_{\iota\in I}E_\iota$ 是 $a=(a_\iota)$ 的鄰域(對於 $\iota\neq K$, a_ι 可以是 E_ι 的任意點), E 既是局部聯通空間, V 必包含 a 的一個聯通鄰域,而這鄰域在 E_K 中的投影就是 a_K 在 E_K 中的一個含在 V_K 中的聯通鄰域. 於是得知 E_K 是局部聯通的. 又這個 a 在 E 中的聯通鄰域必包含 §2 定理 5 中的那種鄰域,所以這個聯通鄰域在除至多有窮多個因子空間以外的因子空間上的投影就是這個因子空間本身,從而依定理 4, 除有窮多個以外,這些因子空間是聯通的。

2) 充分性. 設 $E_{\iota_1},\cdots,E_{\iota_n}$ 是不聯通的因子空間(依假定, n 有窮),並設

$$V=V_{K_1}\times\cdots\times V_{K_m}\times\prod_{\iota\neq K_j}^{j=1,\cdots,m}E_\iota$$

是 $x=(x_\iota)$ 在 E 中的一個鄰域. 取 U_{K_i} 是 x_{K_i} 的一個含在 V_{K_i} $(1\leqslant i\leqslant m)$ 中的聯通鄰域,而 U_{ι_j} 是 x_{ι_j} $(1\leqslant j\leqslant n)$ 的任意聯通鄰域。

令 $$K=\{\iota_1,\cdots,\iota_n\}\cup\{K_1,\cdots,K_m\}(\subset I),$$

那末 $$\prod_{\iota\in K}U_\iota\times\prod_{\iota\in I,\iota\notin K}E_\iota$$

是 x 的一個含在 V 中的聯通鄰域,從而 E 是局部聯通的。

第二章　連續函數與全正則空間

在第一章中，曾逐步研究了連續映像的性質；特別是由一個拓撲空間到數直綫中的連續映像——叫作這空間上的連續函數——在研究空間的拓撲性質時起着特殊重要的作用．本章着重討論連續函數及聯帶有關的拓撲性質．

由於在數直綫上一點的一個基本鄰域組是由以這點爲中心的開區間所組成，所以，依第一章§2定理2，爲了使空間E上定義的函數是連續的，必須且只須對於每個點$x \in E$和每個預定的數$\varepsilon > 0$，必能找到x在E中一個鄰域U，使

$$y \in U \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

任意取一拓撲空間，其上是否一定可以定義連續函數呢？顯然，如果定義$f(x) \equiv \alpha (x \in E)$，$\alpha \in R$，那末$f$是連續函數，從而這些"不足道"的連續函數總是存在的．問題在於是否有非常數的連續函數存在．在第一章§2定義1下例3中曾舉出過一個空間，在其上只有常數值函數是連續的．

本章要解决下列問題：(1)空間的拓撲結構要滿足什麽樣的條件才能使其上有非常數的連續函數？　(2)什麽樣的拓撲空間上有足够多的連續函數，即它的拓撲結構可以完全由其上的一切連續函數决定？　第二問題的精確涵義在下面將更詳細的說明，除此之外，還要研究滿足第二問題中的條件的空間的一些基本性質．

§1.　函數分離性

定義1． 拓撲空間E中兩點a, b叫作函數分離的，是指E上有一連續函數$f(x)$，使$f(a) = 0$，$f(b) = 1$．E中兩不相交集A, B叫作函數分離的，是指在E上有一連續函數$f(x)$，使

$$x \in A \Longrightarrow f(x) = 0, \quad x \in B \Longrightarrow f(x) = 1.$$

註 1. 定義 1 中兩個數 0 與 1 可以換成任意兩個不同實數、並不影響所定義的屬性．事實上，如果 $\varphi(x)$ 是一連續函數，在 a 與 b 處取不同值，那末

$$f(x)=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

就是滿足定義 1 中條件的函數．

註 2. 對於一個拓撲空間來說，下面兩個性質是等價的：

(i) 空間上有一非常數的連續函數；

(ii) 空間中至少有兩個函數分離的點．

註 3. 如果拓撲空間是非聯通的，那末屬於兩個相補閉集的點必是函數分離的．零維 (T_0) 型空間中任意兩點是函數分離的．

註 4. 第一章 §2 定義 1 下例 3 中的空間說明有拓撲空間存在，其中任意兩個點都不是函數分離的．

註 5. 如果在拓撲空間中兩點 a, b 是函數分離的，那末這兩點必各有一鄰域 U, V，使 U 與 V 不相交．事實上，如 f 是定義 1 中的那個連續函數，依第一章 § 2 定理 2,

$$\overset{-1}{f}\left(]-\infty,\ \frac{1}{2}[\right)=U,\quad \overset{-1}{f}\left(]\frac{1}{2},\ +\infty[\right)=V$$

就是所要求的鄰域．同理，如果兩集是函數分離的，那末它們也是鄰域分離的，換句話說，它們各有一鄰域 U, V, $U\cap V=\phi$（集的鄰域是指它的每點各取一個鄰域的併集）．

註 6. 在定義 1 中，如果附加條件 $0\leqslant f(x)\leqslant 1(x\in E)$，並不改變所定義的性質．事實上，如果 $f(x)$ 是定義中的函數，令

$$\varphi(x)=\min(\max(f(x),0),1)$$

就是所要求的函數．

定義 2. 設 E 是一個拓撲空間，考察集偶 (F, G)，其中 F 是 E 中的閉集，G 是 E 中的開集，並且 $G\supset F$. 設 Σ 是某些這樣的集偶組成的組，所謂 Σ 是密的，是指對於任意偶 $(F, G)\in\Sigma$，必存在一開集 $O\subset E$，使

$$\bar{O}\subset G,\quad O\supset F,\quad (F, O)\in\Sigma,\quad (\bar{O}, G)\in\Sigma.$$

空間E中一個這樣的密組叫作E的正則性組,是指Σ是最大的密組.

註 1. 任意多個密組的併仍是密組. 設E是(T_1)型空間,那末對於任意一點x,

$$\{(\{x\}, E), (E, E)\}$$

就是一個密組. 從而對於任意一個(T_1)型空間,最大密組(即正則性組)總是存在的(引用 Zorn 輔助定理!).

註 2. 在任意拓撲空間E中,$\{(E, E)\}$, $\{(\phi, E)\}$, $\{(\phi, \phi)\}$都是密組,叫作不足道密組,這些組中的集偶叫作不足道偶. 對於非(T_1)型空間,可能除不足道的密組之外沒有其它密組. 例如,賦以最粗拓撲結構的任意空間.

定理 1. 為了拓撲空間E上有非常數的連續函數存在,必須且只須這空間有一個密組,而這密組至少含一個非不足道偶(F, G),使$F \neq \phi$, $G \neq E$.

證. 1) 必要性. 設$f(x)$是E上一個非常數連續函數,依定義 1 下註 5 無妨設$f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1 (x \in E)$,這裏$a$, b是E中某兩個點. 對於$[0, 1]$中的任意有理數r,令

$$G_r = \overset{-1}{f}([0, r[),$$

那末

$$\{(\overline{G}_r, G_s) | 0 \leqslant r < s \leqslant 1, r, s \text{ 有理}\}$$

就是一個密組,其中至少包含一個合乎定理中所說條件的非不足道偶$(\overline{G}_{1/2}, G_{2/3})$.

2) 充分性. 設定理的條件滿足,並設(F, G)是E的密組Σ_0中的一個偶,使$F \neq \phi$, $G \neq E$. 令$G_1 = G$; 而當有理數$r > 1$時,令$G_r = E$. 依定義 2,存在開集,表示成$G_{1/2}$,使

$$\overline{G}_{1/2} \subset G_1, \quad G_{1/2} \supset F, \quad (F, G_{1/2}) \in \Sigma_0, \quad (\overline{G}_{1/2}, G_1') \in \Sigma.$$

再依定義 2,存在兩開集,表示成$G_{1/4}$, $G_{3/4}$,使

$$\overline{G}_{1/4} \subset G_{1/2}, \quad G_{1/4} \supset F, \quad (F, G_{1/4}) \in \Sigma_0, \quad (\overline{G}_{1/4}, G_{1/2}) \in \Sigma_0;$$
$$\overline{G}_{3/4} \subset G_1, \quad G_{3/4} \supset \overline{G}_{1/2}, \quad (\overline{G}_{3/4}, G_1) \in \Sigma_0, \quad (\overline{G}_{1/2}, G_{3/4}) \in \Sigma_0.$$

依此類推,可以使對於每個作$k/2^n$ $(0 < k \leqslant 2^n$, k為整數,n為任意

自然數）形狀的有理數，$G_{k/2^n}$ 都有定義，並且當 p 與 q 是兩個上述那樣的有理數且 $p<q$ 時，必然

$$\overline{G}_p \subset G_q, \quad F \subset G_p.$$

令令

$$f(x) = \inf\left\{r \mid r = \frac{k}{2^n},\ 0 < k \leqslant 2^n,\ n = 1, 2, \cdots,\ x \in G_r\right\},$$

那末 $f(x)$ 是 E 上的實值函數，並且 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$。而當 $x \in F$ 時，$f(x) = 0$，當 $x \notin G$ 時，$f(x) = 1$。為了 $f(x)$ 小於某有理數 r（r 的分母為 2 的某次冪），必須且只須 $G_r \ni x$，而為了 $f(x)$ 大於某個如上的有理數 s，必須且只須 $\overline{G}_s \not\ni x$，因為

$$f(x) > s \Longleftrightarrow \text{存在如上的有理數 } q\text{，使 } f(x) > q > s \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x \notin G_q (\supset \overline{G}_s).$$

因此，

$$\overset{-1}{f}(]s, r[) = G_r \cap C\overline{G}_s \quad (s < r)$$

是開集。以上 s, r 是任意兩個分母為 2 的某次冪的分數，而因這種分數在 $[0, 1]$ 中是稠密的，所以一切形如 $]s, r[$ 的區間是 $[0, 1]$ 的一個基，從而得知 f 是連續函數。證完。

系. 為了拓撲空間 E 中的閉集 F 是 E 上某連續函數 f 的零點集（即

$$F = \{x \mid f(x) = 0,\ x \in E\}），$$

必須且只須集 F 可以表示成可數多個開集 G_n 的交（$n = 1, 2, \cdots$），而每個偶 (F, G_n) 屬於空間 E 的一個密組。

證. 1）充分性. 設 F 滿足定理中的條件：

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

而每個偶 (F, G_n) 屬於 E 的密集組，依定理 1 的證明，必有一 E 上的連續函數 f_n，使

$$x \in F \Longrightarrow f_n(x) = 0, \quad x \notin G_n \Longrightarrow f_n(x) = 1,$$
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1 (x \in E).$$

令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x)}{2^n}, \tag{1}$$

那末，由於 (1) 中級數一致收斂[1]，$f(x)$ 是 E 上的連續函數。從而 $f(x) = 0 \Longleftrightarrow$ 對於一切 n, $f_n(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in F$.

2) 必要性. 設有 E 上一個連續函數 f 存在，使

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in F.$$

令

$$G_n = \overset{-1}{f}\left(\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\right),$$

那末 G_n 是含 F 的開集，而不難看出，$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = F$.

註. 如果在一拓撲空間中，任意兩個不同點是函數分離的，那末，依定義 1 下註 5，它必是 (T_2) 型的. 反之，(T_2) 型空間中兩點不一定是函數分離的. 這樣的例曾由蘇聯已故的數學家 П. С. Урысон 作出，由於過於複雜，這裏不去轉述，請讀者參看 Урысон 的論文：Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. 94 (1925), 262—295. 這篇著作是 Урысон 的最後一篇著作，是逝世前三天才完成的（他生於 1898 年 2 月 3 日，卒於 1924 年 8 月 14 日，這篇文章是在 1924 年 7 月底到 8 月中寫的，完成於 8 月 11 日）.

§2. (T_3) 分離性，正則空間

由 §1 末的註可知，爲了在一拓撲空間上建立數學分析，(T_2) 型空間仍嫌太廣泛. 因而我們逐步考慮滿足其它分離性的拓撲空間.

定義 1. (T_1) 型拓撲空間 E 叫作正則的或 (T_3) 型的，是指每一閉集 A 與每一不含在這個集中的點 x 可以鄰域分離，就是說，存在含 A 的開集 O 及 x 的鄰域 V，使 $O \cap V = \phi$. 這種分離性叫作 (T_3) 分離性.

註 1. 由定義不難看出，正則空間的子空間仍是正則的.

註 2. 既然在 (T_1) 型空間中由一個點組成的集是閉集，正則空間

1) 這與數學分析中一個熟知的定理完全一樣地證明，從而證明從略，請讀者自己補足.

必是 (T_2) 型的．逆命題不成立．

例 1．數直綫是正則空間.[1]

例 2．考察實數集 R 中的閉區間 $[0, 1]$．對於 $0 < t \leqslant 1$，令 t 的鄰域等於數直綫 R 的子空間 $[0, 1]$ 中的鄰域，而對於 $t = 0$，取諸集 $[0, x[\setminus \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ $(0 < x \leqslant 1)$ 作它的鄰域．這樣 $[0, 1]$ 成為 (T_2) 型空間 E，但它不是正則空間．事實上，$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$ 是閉集，它不含點 O，但它與這個點不是鄰域分離的．

定理 1． 為了拓撲空間是正則的，必須且只須它是 (T_1) 型的並且其中每點的閉鄰域形成這個點的基本鄰域組．

證．顯然，為了 E 是正則空間，必須且只須對於每點 x 及含 x 的每一開集 O，必有 x 的一個鄰域 V 及含在 O 中的一個閉集 F，使 $V \subset F$，從而 $\overline{V} \subset F \subset O$．證完．

註．在定義 1 中如果免去 (T_1) 型的假定，那末拓撲空間不必是 (T_2) 型的．

例．設 E 只含三個元，並附以最粗的拓撲結構，那麼這個空間不是 (T_1) 型的，但定義 1 中所述的分離性條件却不足道地滿足了．

定義 2． 拓撲空間 E 叫作在點 $x(\in E)$ 處正則的，是指 x 的每一鄰域必包含這點的一個閉鄰域．

註．依這定義，正則空間就是一個在它的每點處正則的 (T_1) 型空間．

定理 2． 設 f 是由拓撲空間 E 中一個稠密集 A 到一個正則空間 E_1 中的映像，並設對於每個點 $a \in E$ 及 A 中每個收斂於 a 的半序點列 (x_ν)，

$$\lim_{x_\nu \to a} f(x_\nu)$$

存在，那末，存在一個由 E 到 E_1 中的連續映像 F，叫作 f 的連續延拓，使 $x \in A \Longrightarrow F(x) = f(x)$，而且 F 是一意確定的．

1) 參看 Натансон 實變函數論第二章 §4 定理 2.

證．1）首先證明，對於A中每個收斂於$a(\in E)$的半序點列(x_α)，極限

$$\lim_{x_\alpha\to x} f(x_\alpha)$$

一意存在，也就是說，這極限只與a有關，而與那收斂於a的半序點列(x_α)的特殊選擇無關．我們應當注意，A中每個收斂於a的半序點列$\{x_\alpha\}$必包含一個子列$\{x_{\alpha_U}\}$，使$\{\alpha_U\}$與依包含關係序次的集$\mathfrak{V}(a)$（點a的鄰域組）序次相似．事實上，只須對於每個$U\in\mathfrak{V}(a)$以及每個α_0，取一$\alpha_U\in(\alpha)$，使$\alpha_U\succ\alpha_0$且$x_{\alpha_U}\in U$就够了．由於$x_\alpha\to a(\alpha\succ\alpha_0)$，這是可能的．設$\{y_\gamma\}$是$A$中收斂於$a$的另一半序點列，取$\{y_{\gamma_U}\}$，即它的與$\mathfrak{V}(a)$序次相似的一個共尾子列．將$\{x_{\alpha_U}\}$與$\{y_{\gamma_U}\}$合組成一個半序點列如下：諸$x_{\alpha_U}$間與諸$y_{\gamma_U}$間的序次關係各保持不變，而當$U\subset V$時$(U,\ V\in\mathfrak{V}(a))$，把$x_{\alpha_V}$放在$y_{\gamma_U}$之前．如此，得出$A$中一個半序點列$\{z_\beta\}$，並且$z_\beta\to a$．考察半序點列$(f(z_\beta))$．依假定，

$$\lim_{z_\beta\to a} f(z_\beta)\quad(z_\beta\in A)$$

存在，今表這個極限表示成$b(b\in E_1)$．$(f(x_{\alpha_U}))$與$(f(y_{\gamma_U}))$既都是$(f(z_\beta))$的子列，依第一章§1定理1，

$$f(x_{\alpha_U})\to b,\quad f(y_{\gamma_U})\to b.$$

但另一方面，$(f(x_{\alpha_U}))$是$(f(x_\alpha))$的子列，所以

$$\lim f(x_{\alpha_U})=\lim f(x_\alpha).$$

同理

$$\lim f(y_{\gamma_U})=\lim f(y_\gamma).$$

因此

$$\lim_{x_\alpha\to a} f(x_\alpha)=b=\lim_{y_\gamma\to a} f(y_\gamma).$$

2）由1）可知，對於每個點$x\in E$，

$$F(x)\equiv\lim_{\substack{x_\alpha\in A\\ x_\alpha\to x}} f(x_\alpha)$$

是一意決定的，從而$F(x)$是由E到E_1中的一個映像．特別取一個各項等於同一元$x\in A$的點列，那末不難看出$F(x)=f(x)$，所以$F(x)$

是$f(x)$在E上的延拓。現在證明$F(x)$的連續性。令$a\in E$,而$x_\alpha\in E$,$x_\alpha\to a$,這裏(x_α)是一個半序點列。取$F(a)$的任意鄰域W_1,依E_1的正則性,可取$F(a)$的一個鄰域V_1,使$\overline{V}_1\subset W_1$。取$A$中半序點列$(y_\beta^{(\alpha)})$,使

$$\lim_\beta y_\beta^{(\alpha)} = x_\alpha,$$

依F的定義,

$$F(x_\alpha) = \lim_\beta f(y_\beta^{(\alpha)}).$$

標號偶(α,β)組成一個定向半序集(半序集的積集),因此$(y_\beta^{(\alpha)})(\alpha,\beta)$組成$A$中一個半序點列。取$a$的鄰域$U$,並依鄰域定義中的$V_4$,取$a$的鄰域$U_0$,使$y\in U_0\Longrightarrow U\in\mathfrak{V}(y)$。既然$x_\alpha\to a$,必存在$\alpha_0$,使$\alpha_1\succ\alpha_0\Longrightarrow x_{\alpha_1}\in U_0$。$U$既是$x_{\alpha_1}$的鄰域,而$y_\beta^{(\alpha_1)}\xrightarrow{(\beta)}x_{\alpha_1}$,必存在$\beta_0^{(1)}$,使$\beta\succ\beta_0^{(1)}\Longrightarrow y_\beta^{(\alpha_1)}\in U$。因此,$(y_\beta^{(\alpha)})$有一子列(爲簡單起見就改用$(y_\beta^{(\alpha)})$表示這個子列),其極限是$a$。這樣,則

$$\lim_{(\alpha,\beta)} f(y_\beta^{(\alpha)}) = F(a).$$

另一方面,V_1是$F(a)$的鄰域,必存在α',β',使

$$(\alpha,\beta)\succ(\alpha',\beta')\Longrightarrow f(y_\beta^{(\alpha)})\in V_1.$$

又因$y_\beta^{(\alpha)}\xrightarrow{(\beta)}x_\alpha$,而$y_\beta^{(\alpha)}\in A$,所以

$$\lim_\beta f(y_\beta^{(\alpha)}) = F(x_\alpha).$$

因而當$\alpha\succ\alpha'$時,$F(x_\alpha)\in\overline{V}_1\subset W_1$。因爲$W_1$是$F(a)$的任意鄰域,所以

$$\lim_\alpha F(x_\alpha) = F(a).$$

因而F的連續性證明了。

3) 設$\varphi(x)$也是f的一個滿足定理中條件的延拓,那末對於$x\in A$,$\varphi(x)=f(x)=F(x)$。從而對於任意$x_0\in E$,取A中一個收斂於x_0的點列(x_δ),那末由於φ,F的連續性,

$$\varphi(x_0) = \lim_\delta \varphi(x_\delta) = \lim_\delta F(x_\delta) = F(x_0).$$

從而F的一意性證明了。

定理 3. 爲了積空間$E=\Pi_{\iota\in I}E_\iota$是正則空間,必須且只須每個因

子空間 E_ι 是正則的.

證. 1) 設 $E=\Pi_{\iota\in I}E_\iota$ 是正則空間. 取 $x=(x_\iota)$ 的任意鄰域 $U=U_{\iota_0}\times\Pi_{\iota\neq\iota_0}E_\iota$, 那末 x 必有一個鄰域 W, 使 $\overline{W}\subset U$. 由第一章 §2 定理 5, 可取 x 的鄰域

$$V=V_{K_1}\times\cdots\times V_{K_m}\times\prod_{\iota\neq K_j}^{1\leqslant j\leqslant m}E_\iota,$$

這裏 V_{K_j} 是 x_{K_j} 的鄰域, 而 $V\subset W$, 於是 $\overline{V}\subset U$. 由第一章 §2 定理 8, 必有一個標號 $K_j(1\leqslant j\leqslant m)$, 使 $K_j=\iota_0$, 而

$$\overline{V}_{K_j}\subset U_{\iota_0},$$

這正是說, E_{ι_0} 是正則的.

2) 充分性由第一章 §2 定理 5 容易推出.

定理 4. 設 $E=E_1\times E_2$ 是拓撲空間 E_1 與 E_2 的積空間, 而 (x_α) 與 (y_β) 各是 E_1 與 E_2 中的半序點列, 並設 f 是由 E 到正則拓撲空間 E_0 中的一個映像. 令

1) $\lim\limits_{(\alpha,\beta)}f(x_\alpha,y_\beta)$ 存在;

2) 對於每個(固定的) $x_1\in E_1$, $\lim\limits_{\beta}f(x_1,y_\beta)=g(x_1)$ 存在, 那末 $\lim\limits_{\alpha}g(x_\alpha)$ 存在, 並且等於 $\lim\limits_{(\alpha,\beta)}f(x_\alpha,y_\beta)$.

證. 令

$$a=\lim_{(\alpha,\beta)}f(x_\alpha,y_\beta).$$

取 a 的任意鄰域 U_0, 依 E_0 的正則性, 可以取 a 的鄰域 V, 使 $\overline{V}\subset U_0$. 依假定可以取 (α_0,β_0), 使

$$(\alpha,\beta)\succ(\alpha_0,\beta_0)\Longrightarrow f(x_\alpha,y_\beta)\in V.$$

固定 $\alpha\succ\alpha_0$, 那末

$$\lim_{\beta}f(x_\alpha,y_\beta)=g(x_\alpha)\in\overline{V}.$$

因此

$$\alpha\succ\alpha_0\Longrightarrow g(x_\alpha)\in\overline{V}\subset U.$$

U 既是 a 的任意鄰域, 由此可知 $\lim\limits_{\alpha}g(x_\alpha)$ 存在, 並且等於 a. 證完.

例. 在數學分析中, 考察雙重數列

$$(u_{m,n})\quad(m,n=1,2,\cdots).$$

設

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} u_{m,n} = a$$

存在，並設對於每個 m，

$$\lim_{n\to\infty} u_{m,n} = b_m$$

存在，那末

$$\lim_{m\to\infty} b_m$$

存在，並且這個極限等於 a．這是數學分析中的熟知結果．

註 1．正則空間較 (T_2) 型空間的分離性更强．但（比較本章 § 1 末的 Урысон 例）正則空間之上是否一定有非常數連續函數存在呢？這問題已經否定地解決了．Н. Л. Раухвагер 在 1945 年[1] 發表了一個例，舉出一個正則空間，其上每個連續函數都是常數值的．這裏不詳述了．

註 2．反之，設在拓撲空間 E 中，任意兩個點是函數分離的，那末它是否一定是正則空間呢？下面的例說明其答案也是否定的．

例．在定義 1 下例 2 的空間中，$f(x)\equiv x$ ($x\in[0, 1]$) 是由 E 到數直綫 R 中的連續映像，因而 E 的任意兩點是函數分離的．但 E 不是正則空間．

因此，爲了在一個拓撲空間上建立數學分析，也就是說，爲了它上面能够有"足够多"的連續函數，我們還需進一步考察加諸這空間之上的條件．

§ 3. 全正則空間

繼續上節的考察，我們還要問，所謂一個拓撲空間上有足够多的連續函數，這究竟是什麽意思呢？是否任意兩點必然函數分離就能表達這一要求呢？由於我們的目的是研究拓撲結構，所謂"有足够多的連續函數"，是指這些連續函數足以決定空間的拓撲結構，更確切地說，這意味着如下的命題：設 $\{f_\iota\}_{\iota\in I}$ 表示拓撲空間 E 上的連續函數全體，那末、爲了 E 中半序點列 (x_α) $(\alpha\in\varDelta)$ 收斂於點 x_0，必須且只須對於每個

1) Ученые записки МГУ, Математика, том 4.

$\iota \in I$,

$$f_\iota(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f_\iota(x_0).$$

如果一個空間上沒有非常數值的連續函數，那末上述條件自然不能成立． 但即使空間上有依某種意義下非常多的非常數值連續函數，這一條件也未必滿足．

例．考察§2定義1下例2中的拓撲空間E，不難看出，每個非常數值綫的區間$[0,1]$上的任意連續函數必是E上的連續函數，從而E的任意兩點是函數分離的，這意味着E上有依一定意義下足够多的連續函數．但E上連續函數的全體還不足以决定E的拓撲結構．例如，在E中點列$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1,2,\cdots}$不收斂於0，但對於這空間上的任意連續函數$f$，$\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$的極限一定是$f(0)$． 事實上，$f$既是連續函數，對於每個正數$\epsilon$，可以取足够小的數$\delta$，使

$$|x|<\delta \text{ 而 } x\neq\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)\Longrightarrow|f(x)-f(0)|<\frac{\epsilon}{2}.$$

又取$p>\frac{1}{\delta}$，並取$\delta'>0$，使

$$\left|x-\frac{1}{p}\right|<\delta'\Longrightarrow\left|f(x)-f\left(\frac{1}{p}\right)\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

合併以上兩個不等式，可知當$p>\frac{1}{\delta}$時，取一個x，使$x\neq\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，且

$$x\in\,]-\delta,\delta[\,\cap\,]\frac{1}{p}-\delta',\frac{1}{p}+\delta'[\ (\neq\phi).$$

那末

$$\left|f\left(\frac{1}{p}\right)-f(0)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{1}{p}\right)-f(x)\right|+|f(x)-f(0)|<\epsilon.$$

於是得證$f\left(\frac{1}{p}\right)\to f(0)$．

下面首先證明另外幾個條件與上述那一條件（即有足够多的連續函數）等價．

定理 1. 對於一個 (T_0) 型拓撲空間 E，下面幾個條件是等價的：

1°. E 上有足够多的連續函數，更確切地說，為了 E 中半序點列 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ 收斂於點 x_0，必須且只須對於 E 上每個有界連續函數 f，

$$f(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f(x_0);$$

2°. E 中任意一點與任意一個不含這點的閉集是函數分離的，換句話說，對於任意一點 $x_0 \in E$ 及 x_0 的任一鄰域 V，必存在 E 上的一個連續函數 f，使 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1\ (x \in E)$，並且

$$f(x_0) = 0, \quad z \notin V \Longrightarrow f(z) = 1;$$

3°. 設 $\mathfrak{f}$ 表示 E 上連續函數的全體，那末

$$\{f^{-1}(]\alpha, \beta[) \mid \alpha, \beta \in R,\ \alpha < \beta,\ f \in \mathfrak{f}\}$$

是 E 的基；

4°. 對於每一點 $x_0 \in E$ 與 x_0 的每一鄰域 V，(x_0, V) 屬於 E 的一個密組（Ю. Смирнов）[1]；

5°. E 同胚於數直綫的子空間 $[0, 1]$ 的某一冪（即 $\prod_{\iota\in I} S_\iota$，$S_\iota = [0, 1]$）的一個子空間.

證. 我們證明 $1^\circ \Longrightarrow 5^\circ \Longrightarrow 2^\circ \Longrightarrow 3^\circ \Longrightarrow 4^\circ \Longrightarrow 1^\circ$.

1）設 (T_0) 型空間 E 滿足條件 1°，並設 $\mathfrak{f}_0$ 是 E 上一切在 $[0, 1]$ 中取值的連續函數全體. 對於 E 上任意有界連續函數 φ，如果 $\varphi(x)$ 不是常數，令

$$\sup_{x\in E} \varphi(x) = b, \quad \inf_{x\in E} \varphi(x) = a,$$

那末

$$f(x) \equiv \frac{\varphi(x) - a}{b - a} \in \mathfrak{f}_0,$$

而且對於 E 中任意一個半序點列 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ 及點 $x_0 \in E$，

$$f(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f(x_0) \Longleftrightarrow \varphi(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} \varphi(x_0).$$

因此，依 1°，為了 $x_\alpha \to x_0$，必須且只須對於每個 $f \in \mathfrak{f}_0$，$f(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} f(x_0)$. 今令

$$\psi(x) = \{f_0(x)\}_{f\in\mathfrak{f}_0} \quad (x \in E),$$

1）Смирнов 的原來結果是說，(x_0, V) 屬於 E 的正則性組. 感謝羅雙泉同志指出密組的極大性是用不到的.

那末 ψ 是由 E 到積空間

$$\prod_{f\in\mathfrak{f}_0} S_f \quad (S_f = [0, 1], \text{對於每個 } f\in\mathfrak{f}_0)$$

中的映像，這裏 [0, 1] 是看作數直線的子空間。由於 E 是 (T_0) 型的，依第一章 §3 定理 1，如果 x，y 是 E 中兩個不同點，可以設必有一收斂於 x 的半序點列 $(x_\delta)_{\delta\in\Delta}$，而 (x_δ) 不收斂於 y. 依 1°，對於每個 $f\in\mathfrak{f}_0$，

$$f(x_\delta)\to f(x),$$

但存在 $f_0\in\mathfrak{f}_0$，使

$$f_0(x_\delta)\nrightarrow f_0(y),$$

從而 $f_0(x)\neq f_0(y)$，因爲 S_{f_0} 是 (T_2) 型空間，這就是說，ψ 是由 E 到 $\Pi_{f\in\mathfrak{f}_0}S_f$ 中的一對一映像。由 1° 及第一章 §2 定理 7，ψ 與 $\overset{-1}{\psi}$ 都是連續的，從而 ψ 是同胚映像。於是證明了 $1^\circ\Longrightarrow 5^\circ$.

2) 設 (T_0) 空間 E 滿足 5°. 取 E 中一點 x_0 及 x_0 的一個鄰域 V，依 [0, 1] 的拓撲結構及連續函數的性質，如果 $f\in\mathfrak{f}_0$，

$$\{x\,|\,|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}$$

是 x_0 的一個鄰域。依第一章 §2 定理 5 及 5°，可知存在有窮多個函數 f_1、…，$f_n\in\mathfrak{f}_0$，使

$$|f_k(x)-f_k(x_0)|<\varepsilon\quad(1\leqslant k\leqslant n)\Longrightarrow x\in V,$$

這就是說，如果 $x\notin V$，必存在一整數 k，使 $1\leqslant k\leqslant n$，而

$$|f_k(x)-f_k(x_0)|\geqslant\varepsilon.$$

令

$$\varphi_k(x)=\min\left(\frac{1}{\varepsilon}|f_k(x)-f_k(x_0)|,1\right),$$

並令

$$f(x)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}(\varphi_k(x)),$$

那末 $f(x)$ 是 E 上一個連續函數，並且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1\,(x\in E)$，$f(x_0)=0$，$x\notin V\Longrightarrow f(x)=1$. 於是證明了 $5^\circ\Longrightarrow 2^\circ$.

3) 設 (T_0) 型空間 E 滿足 2°. 考察證明 1) 中所述的 E 上連續函數族 $\mathfrak{f}_0$. 對於每個 $x_0\in E$ 及 x_0 的每個鄰域 V，存在 $f_0\in\mathfrak{f}_0$，使

$$f_0(x_0)=0,\quad x\notin V\Longrightarrow f_0(x)=1,$$

從而

$$\overset{-1}{f_0}\left(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\right)\subset V, \quad \overset{-1}{f_0}\left(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\right)\ni x_0.$$

於是 $3°$ 得證.

4) 設 (T_0) 型空間 E 滿足條件 $3°$. 取 $x_0\in E$ 及 x_0 的一個開鄰域 V, 依 $3°$, E 上必有一連續函數 f, 並存在實數 α, β (使 $\alpha<\beta$), 使

$$x_0\in \overset{-1}{f}(]\alpha, \beta[)\subset V.$$

如果 $x, y\in E$, 而 $x\neq y$, 那末由於 E 是 (T_0) 型空間, 無妨設 x 有一鄰域 U, 使 U 不包含 y, 這樣, E 上必有一連續函數 f_1, 並存在實數 γ, δ, 使 $\gamma<\delta$, 並且

$$x\in \overset{-1}{f_1}(]\gamma, \delta[)\subset U,$$

而

$$f_1(y)>\delta \quad 或者 \quad f_1(y)<\gamma.$$

這樣,

$$W=\overset{-1}{f_1}(]-\infty, \gamma[)\cup \overset{-1}{f_1}(]\delta, \infty[)$$

是 y 的鄰域, 而 $W\not\ni x$, 於是得證 E 是 (T_1) 型空間, 從而 $\{x_0\}$ 是閉集. 依 §1 定義 2 下的註 1, $(\{x_0\}, V)$ 屬於一個密組. 於是證明了 $3°\Longrightarrow 4°$.

5) 設 (T_0) 型空間 E 滿足 $4°$. 我們證明, 如果半序點列 (x_α) 不收斂於 x_0, 那末必存在 E 上連續函數 f, 使 $f(x_\alpha)$ 不收斂於 $f(x_0)$. 事實上, 既然 (x_α) 不收斂於 x_0, x_0 必有一鄰域 V, 使對於每個 α_0, 必有一 $\alpha_1\succ\alpha_0$, 使

$$x_{\alpha_1}\notin V.$$

這樣的 (x_{α_1}) 是 (x_α) 的一個共尾子列. 依假定 $4°$ 及 §1 中定理 1 的證明 2), E 上有連續函數 $f(x)$, 使

$$f(x_0)=0, \quad x\notin V\Longrightarrow f(x)=1, \quad 0\leqslant f(x)\leqslant 1 \ (x\in E).$$

因此 $f(x_{\alpha_1})$ 都等於 1, 不可能收斂於 $f(x_0)=0$, 從而數列 $(f(x_\alpha))$ 也不可能收斂於 $f(x_0)$. 於是得證 $4°\Longrightarrow 1°$.

定義 1. (T_0) 型空間叫作全正則空間, 是指它滿足定理 1 中的條件($1°$ 或任意與它等價的 $2°$, $3°$, $4°$, $5°$).

註 1. 正則空間不必是全正則的 (見 §2 定理 4 下註 1). 但全正

則空間必是正則的，從而是 (T_1) 型及 (T_2) 型的.

註 2. 不難看出，全正則空間的子空間必仍是全正則的.

註 3. 全正則空間首先是由蘇聯數學家 A. H. Тихонов 提出的(見 Math. Ann. 102 (1929), 544—561)，因此也叫作 Тихонов 空間.

註 4. 在定理 1 中證明了全正則空間必是 $[0, 1]$ 的某冪空間 $\Pi_{\iota\in I} S_\iota$ 的子空間. 現在考察一下 I 的最小可能權 τ. 依證明中的 1)，τ 可取成足以決定 E 上的拓撲結構的連續函數組的最小權. 依定理 1 的證明不難看出可以取 τ 等於 E 的權數(第一章 §4). 因此，依定理 1 之 5°，權數不超過 τ 的全正則空間所組成的空間類中的萬有空間就是數直綫上區間 $[0, 1]$ 的 τ 次冪. 這個結果也是 Тихонов 的(見前引的論文).

§4. 正 規 空 間

全正則空間比任意兩點必函數分離的空間在函數分離性上又加强了一步，正如正則空間比 (T_2) 型空間在鄰域分離性上又加强了一步一樣，即把一點與一不含這點的閉集的分離代替了兩個不同點的分離. 很自然地可以提出問題，是否可以更進一步考慮任意兩不相交閉集的分離性呢？有趣的是任意兩不相交閉集的鄰域分離性與任意兩不相交閉集的函數分離性，對於 (T_1) 型空間來說是等價的. 這引導我們去提出下列定義.

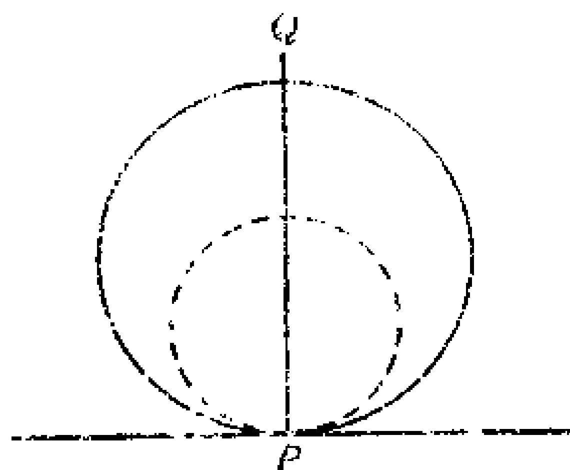
定義 1. 一個 (T_1) 型空間叫作正規空間或 (T_4) 型空間，是指其中任意兩個不相交閉集是鄰域分離的，即如果 A, B 是其中兩個不相交閉集，那末必存在開集 G_1、G_2，使

$$G_1 \supset A,\quad G_2 \supset B,\quad \text{且}\quad G_1 \cap G_2 = \phi.$$

註. 正規空間既是 (T_1) 型的，由一個點組成的集是閉集，從而依 §3 定理 1 的 4°，正規空間必是全正則的，從而是正則的，(T_2) 型的，等等. 但全正則空間不必是正規的，請看下面的例 2.

例 1. 數直綫是正規空間.

例 2. 設 E 是由縱坐標爲非負的實數偶 $(x, y)(y \geqslant 0)$ 所組成，它的拓撲結構規定如下：如果 $y > 0$，規定 (x, y) 的鄰域與在數平面 R^2 中一樣；如果 $y = 0$，取與 x 軸在點 $(x, 0)$ 處相切的諸無周界圓（但算上點 $(x, 0)$ 自己）作 $(x, 0)$ 的基本鄰域組。不難證明這樣定義的空間 E 是 (T_0) 型拓撲空間，這空間是全正則的。爲此，只須證明 §3 定理 1 中的條件 2°。如果所考察的點不在 x 軸上，3° 中所要求的函數的存在不難看出。現在考察在 x 軸上的點 $P = (x,0)$，取它的一個鄰域 V，使 V 是在 P 點與 x 軸相切的圓。令 PQ 是圓的直徑，而在 PQ 上，定義連續函數 $f(z)$ 是綫性的，並且 $f(P) = 0$, $f(Q) = 1$. 在每個含在 V 中並與 x 軸在點 P 相切的圓上，令 $f(z)$ 取常數值；在 V 的外部令 $f(z) = 1$，那末 $f(z)$ 是一個滿足 §3 定理 1 條件 3° 的要求的函數，從而 E 是全正則的。



E 不是正規空間。事實上，設 A 是 x 軸上一切有理數點所組成的集，而 B 是 x 軸上一切無理數點所組成的集，那末不難看出 A, B 是 E 中不相交閉集，但 A, B 不可能鄰域分離。

定理 1 (Урысон). 爲了一個 (T_1) 型拓撲空間 E 是正規的，必須且只須下列諸條件中的任意一個滿足：

1°. 這空間存在一個密組，它由一切可能的集偶

$$(F, G), \quad (G \supset F,\ F \text{ 是閉集},\ G \text{ 是開集})$$

組成 (Ю. Смирнов)[2]；

2°. E 中任意兩個不相交閉集 A, B 是函數分離的，換句話說，存在 E 上一個連續函數 $f(x)$，使在 E 上 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$，而

$$x \in A \Longrightarrow f(x) = 0, \quad x \in B \Longrightarrow f(x) = 1.$$

---

1) 參看 Натансон 實變函數論第二章 §4 定理 2.

2) 用密組代替正則性組，是由羅雙泉同志指出的。

註．對於一個拓撲空間來說，下面兩個屬性，即

(a) 任意兩點必鄰域分離(即 (T_2) 型分離性)；

(b) 任意兩點必函數分離

並不是等價的． 但由本定理可知，如果把上面的兩命題中"點"字換成"閉集"，那末對於 (T_1) 型空間來說，兩命題却是等價的．

證．我們證明正規性 $\Longrightarrow 1° \Longrightarrow 2° \Longrightarrow$ 正規性．

1) 設 E 是正規空間． 令 F 是 E 中的閉集、G 是含 F 的開集，那末 $B \equiv CG$ 是與 F 不相交的閉集．而依定義 1，必存在開集 U、V，使

$$U \supset F, \quad V \supset B, \quad U \cap V = \phi.$$

這樣 CV 是閉集，包含 U，從而 $\overline{U} \subset CV \subset CB = G$． 所以一切集偶 (F, G) (F 是閉集，G 是開集，$G \supset F$)組成 E 中一個密組(從而必是正則性組，因爲它已是最大的了)．

2) 設 E 是滿足條件 1° 的 (T_1) 型空間，並設 A, B 是 E 中兩個不相交閉集，取 $U_1 = CB$，那末 U_1 是含 A 的開集．依條件 1° 及 §1 定義 2，必存在一個開集 U_0，使 $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset B$． 設對於任意二進分數 $\frac{k}{2^n}$ $(0 \leqslant k \leqslant 2^n)$ 已定義了開集 $U_{k/2^n}$，使

$$\overline{U}_{k/2^n} \subset U_{(k+1)/2^n} \quad (0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1).$$

取任意一個二進分數 $\frac{2k+1}{2^{n+1}}$ $(0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1)$，依條件 1° 及 §1 定義 2，必存在開集 O，使

$$\overline{U}_{k/2^n} \subset O \subset \overline{O} \subset U_{(k+1)/2^n}.$$

今把 O 表示成 $U_{(2k+1)/2^{n+1}}$，於是對於每個二進分數 $r \in [0, 1]$，定義了一個開集 U_r，使

$$A \subset U_0, \quad B \subset CU_1;$$

當 r 與 r' 是 $[0, 1]$ 中兩個二進分數並且 $r \leqslant r'$ 時，

$$U_r \subset U_{r'}.$$

如果 t 是 $[0, 1]$ 中的任意實數，規定

$$U_t = \bigcup_{r \leqslant t} U_r \quad (r \text{ 表示二進分數});$$

如果 t 本身是二進分數，那末這樣的規定與以前的敍述相符；如果 $0\leqslant t<t'\leqslant 1$，$t$ 與 t' 都是實數，那末必存在二進分數 r, r'，使 $t\leqslant r<r'\leqslant t'$，從而

$$\overline{U}_t\subset\overline{U}_r\subset U_{r'}\subset U_{t'}.$$

於是對於每一在 0 與 1 之間的實數 t，定義了一個開集 U_t，滿足

$$0\leqslant t<t'\leqslant 1\Longrightarrow\overline{U}_t\subset U_{t'}.$$

我們定義一個函數 $g(x)$ 如下：

如果 $x\in B$，令 $g(x)=1$；

如果 $x\notin B$，令 $g(x)=\inf\{t\,|\,x\in U_t\}$.

不難看出，對於一切 $x\in E$，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，當 $x\in A$ 時，$g(x)=0$。我們將證明 $g(x)$ 是連續的。事實上，對於 $x_0\in E$，令 $g(x_0)=a$，那末

$$y\in U_{a+\varepsilon}\diagdown\overline{U}_{a-\varepsilon}\Longrightarrow|g(y)-g(x_0)|<\varepsilon,$$

而 $U_{a+\varepsilon}\diagdown\overline{U}_{a-\varepsilon}$ 是 x_0 的鄰域（注意，當 $a+\varepsilon>1$ 時，取 $U_{a+\varepsilon}=E$；當 $a-\varepsilon<0$ 時，取 $U_{a-\varepsilon}=\varnothing$）。於是條件 2° 滿足了。

3）設 E 是滿足條件 2° 的 (T_1) 型空間，設 A 與 B 是 E 中兩個不相交閉集，而設 $f(x)$ 是 2° 中所說的連續函數，那末

$$\overset{-1}{f}\left([0,\frac{1}{2}[\right)=G_1\quad\text{與}\quad\overset{-1}{f}\left(]\frac{1}{2},1]\right)=G_2$$

即是兩個不相交開集，且 $G_1\supset A$，$G_2\supset B$。正規性證明了。

定理 2（Урысон）。為了 (T_1) 型空間 E 是正規空間，必須且只須下列條件滿足：對於任意閉集 $A\subset E$ 及任意定義在 A 上的連續函數 $f(x)$（可能取有窮值或無窮值）[1]，必存在一個 E 上的（有窮值或無窮值）連續函數 g（叫作 f 在全空間上的延拓），使 $x\in A\Longrightarrow f(x)=g(x)$。

註 1．這定理首先是由 П. С. Урысон 對有界連續函數的情形證明的［Math. Ann. 94 (1925)，262—295］，其後由 Н. Б. Веденисов 推廣到一般（不必有界）的連續函數的情形中去（1938）。

註 2．既然閉子空間中的閉集也是原空間中的閉集，依定理 2，正規空間中的閉子空間必是正規空間。

1）像在平常實變數函數論中一樣，我們常設函數可以取無窮值 $\pm\infty$，而關於 $\pm\infty$ 的運算，也作如平常的規定。

證．1) 設E是滿足定理中條件的(T_1)型空間，設B, C是不相交閉集．令

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{如果} \quad x\in B,\\ 1 & \text{如果} \quad x\in C,\end{cases}$$

那末$f(x)$是定義在E中閉集$A\equiv B\cup C$上的連續函數，而由定理中的條件，$f(x)$可以延拓到全空間E上去而成爲E上的連續函數$g(x)$．令

$$\varphi(x)=\min(\max(g(x),0),1),$$

那末$\varphi(x)$就是滿足定理1中條件2°的連續函數，從而E是正規空間．

2) 設E是正規空間．由於$[-\infty,+\infty]$與$[-1,+1]$是同胚的，我們無妨設A上的連續函數只在$[-1,1]$中取值．

首先，我們注意，設u是由A到$[-1,1]$中的一個連續映像，必有一個由E到$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$中的連續映像$v$，使對於每個$x\in A$，

$$|u(x)-v(x)|\leqslant\frac{2}{3}.$$

事實上，令

$$H=\overset{-1}{u}\left(\left[-1,-\frac{1}{3}\right]\right)\cap A,\quad K=\overset{-1}{u}\left(\left[\frac{1}{3},1\right]\right)\cap A,$$

那末H與K是A中的閉集，從而也是E中的閉集，並且$H\cap K=\phi$．依定理1的2°及§1定義1下註1，必有一個由E到$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$中的連續映像$v$，使

$$x\in H\Longrightarrow v(x)=-\frac{1}{3},\quad x\in K\Longrightarrow v(x)=\frac{1}{3}.$$

這個$v(x)$正是我們所要求的函數．

現在在E上定義一串連續函數$g_n(x)$如下：設$f(x)$是定理的假定中所說的那個連續函數．令$u=f$，並依上述作一個由E到$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$中的連續映像$g_0$，使

$$x \in A \Longrightarrow |f(x) - g_0(x)| \leqslant \frac{2}{3}.$$

設 g_n 是由 E 到

$$\left[-1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1},\ 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

中的連續映像，使

$$x \in A \Longrightarrow |f(x) - g_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

令

$$u(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}(f(x) - g_n(x)),$$

那末依上述，可作一個由 E 到

$$\left[-\frac{2^{n+1}}{3^{n+2}},\ \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}}\right]$$

中的連續映像 h_{n+1}，使

$$x \in A \Longrightarrow |f(x) - g_n(x) - h_{n+1}(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}.$$

令 $g_{n+1} = g_n + h_{n+1}$，於是在 E 上，

$$|g_{n+1}(x)| \leqslant 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}.$$

這樣，得到一串連續函數 g_n，而對於每個 $x \in E$，

$$m,\ n \geqslant p \Longrightarrow |g_n(x) - g_m(x)| \leqslant \frac{2^{p+1}}{3^{p+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}.$$

由此可知，當固定 x 時，$(g_n(x))_n$ 是一個基本數列，從而收斂於 $[-1, 1]$ 中的一個數，表示成 $g(x)$。在 A 上，$f(x) - g_n(x)$ 既然趨於 0，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的延拓：即

$$x \in A \Longrightarrow g(x) = f(x).$$

最後，應證明 $g(x)$ 是連續映像。設 $x \in E$，依上述，對於每個 $\varepsilon > 0$，存在自然數 n_0，使對於每個 $y \in E$，

$$m \geqslant n_0,\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow |g_m(y) - g_n(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $m \to \infty$，那末對於每個 $y \in E$，

$$|g(y)-g_{n_0}(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

n_0 既已固定，令 V 表示 x 的鄰域，使

$$y\in V\Longrightarrow|g_{n_0}(y)-g_{n_0}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此，如果 $y\in V$，那末

$$|g(y)-g(x)|\leq|g(y)-g_{n_0}(y)|+|g_{n_0}(y)-g_{n_0}(x)|+$$
$$+|g_{n_0}(x)-g(x)|<\varepsilon.$$

從而 $g(x)$ 的連續性證明了。

系. 如果在定理中 $f(x)$ 是有窮的連續函數，那末 $g(x)$ 也可以取成有窮值的。

證. 1) 首先設在 A 上 $f(x)\geq 0$、依定理 2，必有一個 E 上的連續函數 $g_1(x)$，在 $[0, +\infty]$ 中取值，而且

$$x\in A\Longrightarrow g_1(x)=f(x).$$

令 $B=\overset{-1}{g_1}(\{+\infty\})$，那末 B 是閉集，並與 A 不相交。定義函數 h 如下：

$$\text{如果}\quad x\in A,\quad h(x)=f(x),$$
$$\text{如果}\quad x\in B,\quad h(x)=0,$$

那末 $h(x)$ 是定義在閉集 $A\cup B$ 上的連續函數。設 $g_2(x)$ 是 $h(x)$ 在全空間上的連續延拓（依定理 2，這一函數是存在的），我們無妨設 $g_2(x)$ 在 $[0, +\infty]$ 中取值，因爲必要時可以用

$$\max(g(x), 0)$$

代替 $g(x)$，那末

$$g(x)=\min(g_1(x), g_2(x))$$

就是所求的函數.

2) 在一般情形下，令

$$f_+(x)=\max(f(x), 0),\quad f_-(x)=\max(-f(x), 0),$$

那末 f_+, f_- 都是 E 上的非負值連續函數. 依 1)，可以作出 f_+, f_- 在 E 上的連續延拓 g_1, g_2，使它們都是只取非負有窮值的. 這樣 $g(x)=$ $=g_1(x)-g_2(x)$ 就是 $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$ 的有窮值連續延拓.

註. 由於 $]-\infty, +\infty[$ 與 $]0, 1[$ 同胚,可知在定理 2 中,如果 $f(x)$ 是只取正值的,那末 $g(x)$ 也可以取成只取正值的.

定義 2. 兩個有窮集組 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 與 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ 叫作依組合意義相似的,是指對於 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意子集 $\{i_1, \cdots, i_k\}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$,

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} = \phi \Longleftrightarrow B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_k} = \phi. \tag{1}$$

註. 這定義是由蘇聯著名數學家 П. С. Александров 提出的 [Ann. of Math., 2nd ser., 30 (1929), 101—187].

定理 3. 在一正規空間中,對於每個有窮的閉集組 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$,必可找到一個開集組 $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$,使 $F_i \subset G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$,並且 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ 與 $\{\overline{G}_1, \cdots, \overline{G}_n\}$(從而也與組 $\{G_1, \cdots, G_n\}$)依組合意義相似.

證. 考察凡使

$$F_1 \cap (F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}) = \phi$$

的交 $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} (1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant n)$,並令 S_1 表示所有這些交的併集. 於是 $S_1 \cap F_1 = \phi$,並且 S_1 是閉集,因爲它是有窮多個閉集的併. 依空間的正規性,存在開集 G_1 與 H_1,使

$$F_1 \subset G_1, \quad S_1 \subset H_1, \quad G_1 \cap H_1 = \phi.$$

我們將證明 $\overline{G}_1 \cap H_1 = \phi$. 事實上,如果不然,必有一點 $x \in \overline{G}_1 \cap H_1$,從而 x 有一鄰域 V,使 V 含在 H_1 中,而 $V \cap G_1 \neq \phi$,即 $G_1 \cap H_1 \neq \phi$. 得出矛盾. 從而 $\overline{G}_1 \cap S_1 = \phi$.

我們將證明 $\{\overline{G}_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 與 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 依組合意義相似. 取後一組中的一些集 $F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$,使其交等於 ϕ. 設 $i_1 = 1$,那末 $F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_k} \subset S_1$,但 $\overline{G}_1 \cap S_1 = \phi$,所以 $\overline{G}_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_k} = \phi$. 反之

$$\overline{G}_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_k} = \phi \Longrightarrow F_1 \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_k} = \phi. \tag{2}$$

如果 $\{i_1, \cdots, i_n\}$ 不包含 1,那末兩集組中的相應集完全相同,從而與(2)類似的相應關係不須證明. 於是上面的結論證完. 用數學歸納法,定理容易證明.

定理 4. 爲了 (T_1) 型空間 E 是正規的,必須且只須它滿足下列條件

件：對於E中任意一組開集$\{G_1, \cdots, G_n\}$，這裏$\bigcup_{i=1}^{n} G_i = E$，必存在開集$H_i$，使$\overline{H}_i \subset G_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，而

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = E.$$

註. 拓樸空間中一組開集叫作空間中集A的覆蓋，是指這些開集的併包含A. 覆蓋叫作有窮的，是指那個開集組只有有窮多個開集. 於是定理中的條件可以改述如下：對於E的任意有窮覆蓋$\{G_1, \cdots, G_n\}$，必存在另一有窮覆蓋$\{H_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$，使$\overline{H}_i \subset G_i$.

證. 1) 必要性. 設E是正規空間，而$\{G_1, \cdots, G_n\}$是E的一個有窮覆蓋. 令$F_i = CG_i \ (1 \leqslant i \leqslant n)$，引用定理3，可得一個開集組$\{J_1, \cdots, J_n\}$，使$F_i \subset J_i$，而

$$\overline{J}_1 \cap \cdots \cap \overline{J}_n = \phi,$$

因為$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n} CG_i = C \bigcup_{i=1}^{n} G_i = CE = \phi$. 令$H_i = C\overline{J}_i$，那末$H_i$是開集，而

$$\overline{H}_i = \overline{C\overline{J}_i} \subset \overline{CJ_i} = CJ_i \subset CF_i = G_i,$$

並且

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \bigcup_{i=1}^{n} C\overline{J}_i = C \bigcap_{i=1}^{n} \overline{J}_i = C\phi = E.$$

2) 充分性. 設E是滿足定理中條件的(T_1)型空間，設F_1與F_2是兩不相交的閉集，$G_1 \equiv CF_1$與$G_2 \equiv CF_2$是開集，並且G_1與G_2組成E的覆蓋. 依條件，存在開集$H_i (i = 1, 2)$，使$\overline{H}_i \subset G_i \ (1 \leqslant i \leqslant 2)$，而$H_1 \cup H_2 = E$. 令$J_i = C\overline{H}_i \ (i = 1, 2)$，那末$J_i$是開集，

$$J_i = C\overline{H}_i \supset CG_i = F_i \quad (i = 1,2),$$

而

$$J_1 \cap J_2 = C\overline{H}_1 \cap C\overline{H}_2 = C(\overline{H}_1 \cup \overline{H}_2) = CE = \phi.$$

依定義1，空間的正規性證完.

定理 5. 為了(T_1)型空間E是正規空間，必須且只須E滿足下列條件：設$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$是$E$的一個有窮覆蓋，必存在一組$E$上的非

負值連續函數 $f_i(1\leqslant i\leqslant n)$,使對於 $x\in E$,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=1,$$

而

$$x\in CG_i\Longrightarrow f_i(x)=0.$$

證. 1) 必要性. 依定理 4,取開集 $H_i(1\leqslant i\leqslant n)$,使

$$\bigcup_{i=1}^{n} H_i=E,\quad \overline{H}_i\subset G_i\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

依空間的正規性及定理 1、存在一個由 E 到 $[0,1]$ 中的連續函數 $g_i(1\leqslant i\leqslant n)$,使

$$x\in CG_i\Longrightarrow g_i(x)=0,\quad x\in\overline{H}_i\Longrightarrow g_i(x)=1\ (1\leqslant i\leqslant n).$$

既然 $\bigcup_{i=1}^{n} H_i=E$,對於每個 $x\in E$, $\sum_{i=1}^{n} g_i(x)>0$. 取

$$f_i(x)=\frac{g_i(x)}{\sum_{k=1}^{n} g_k(x)},$$

$f_i(x)$ 就是所求的函數.

2) 充分性. 設 A, B 是空間中兩個不相交閉集, $\{CA, CB\}$ 是 E 的覆蓋,從而依定理中的條件, E 上有兩個非負值連續函數 $f(x)$, $g(x)$,使

$$x\in A\Longrightarrow f(x)=0,\quad x\in B\Longrightarrow g(x)=0,$$

而對於一切 $x\in E$, $f(x)+g(x)=1$. 但這樣必然

$$x\in B\Longrightarrow f(x)=1,$$

從而依定理 1 的 2°, E 是正規空間.

系. 設 F 是正規空間 E 中的閉集,而 $\{G_1,\cdots,G_n\}$ 是 F 的覆蓋(G_i 是開集),那末 E 上必有一組非負值連續函數 $f_1,\cdots,f_n$,使

$$x\in F\Longrightarrow\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=1,\quad x\in CG_i\Longrightarrow f_i(x)=0\ (1\leqslant i\leqslant n).$$

證. 事實上, $\{G_1, G_2,\cdots,G_n, CF\}$ 是 E 的覆蓋. 依定理 5, E 上有一組非負值連續函數 $f_1,\cdots,f_n$, g,使對於一切 $x\in E$,

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) + g(x) = 1,$$

而

$$x \in CG_i \Longrightarrow f_i(x) = 0, \quad x \in F \Longrightarrow g(x) = 0.$$

$\{f_1, \cdots, f_n\}$ 正是所求的函數組.

定理 6 (Тихонов). 具有可數基的正則空間必是正規的.

註. 這個定理是 А. Н. Тихонов 在 1925 年提出的 [Math. Ann. 95 (1925), 139—142]. 注意一般的正則空間不必是正規的. 事實上, 定義 1 下例 2 中的空間不是正規的, 但它是正則的.

證. 令 $\mathfrak{D} = \{O_1, O_2, \cdots, O_n, \cdots\}$ 是正則空間 E 的基. 設 A, B 是 E 中兩個不相交的閉集. 考察 $\mathfrak{D}$ 中依上列次序第一個與 A 相交的開集, 設它是 O_{n_1}. 取 $x_1 \in A \cap O_{n_1}$, 再由 $\mathfrak{D}$ 中取出第一個含 x_1 並且滿足

$$\overline{V}_1 \subset O_{n_1} \cap CB$$

的開集 V_1 來; 這依空間的正則性與基的定義是可能的. 於是 $\overline{V}_1 \cap B = \phi$. 同樣, 由 $\mathfrak{D}$ 中取含 B 中一點 y_1 的第一個集, 表示成 U_1, 使 $\overline{U}_1 \cap A = \phi$, $U_1 \cap V_1 = \phi$. 這一性質也是可能的, 因爲否則 $\mathfrak{D}$ 中每個包含 y_1 的集與 V_1 相交, 從而 $y_1 \in \overline{V}_1$, 與 $\overline{V}_1 \cap B = \phi$ 相矛盾. 今設已經找好 $\mathfrak{D}$ 中的開集 $V_1, \cdots, V_n, U_1, \cdots, U_n$, 使

$$U_i \cap V_j = \phi \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n),$$

並且 V_i 是 A 中某點的鄰域, 或是空集, 而 $\overline{V}_i \cap B = \phi$; U_i 是 B 中某點的鄰域, 或是空集, 而 $\overline{U}_i \cap A = \phi$. 如果 $\{V_1, \cdots, V_n\}$ 還不是 A 的覆蓋, 取

$$x_{n+1} \in A \cap C\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right),$$

並由 $\mathfrak{D}$ 中取出第一個含 x_{n+1} 的集, 表示成 V_{n+1}, 使 $\overline{V}_{n+1} \subset CB$, 而且 $V_{n+1} \cap U_i = \phi$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; 這依 E 的正則性及基的定義是可能的, 因爲否則設 $\mathfrak{D}$ 中每個含 x_{n+1} 的集與 $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ 相交, 從而依基的定義, x_{n+1} 的每個鄰域與 $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ 相交, 即

$$x_{n+1} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} U_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_i,$$

與 $\overline{U}_i \cap A = \phi\ (1 \leq i \leq n)$ 的假定衝突. 如果 $\{V_1, \cdots, V_n\}$ 已經是 A 的覆蓋, 那末令 $V_{n+1} = \phi$. 同樣可以得出 U_{n+1}, 使它或者是空集 $\left(\text{如果} \bigcup_{i=1}^{n} U_i \supset B\right)$, 或者是 $\mathfrak{D}$ 中一個集, 使

$$\overline{U}_{n+1} \cap A = \phi, \text{ 並且 } U_{n+1} \cap V_i = \phi\ (1 \leq i \leq n).$$

於是得出 $\mathfrak{D}$ 中的兩串集 $\{V_i\}_{i=1,2,\cdots}$ 與 $\{U_i\}_{i=1,2,\cdots}$, 使

$$U_i \cap V_j = \phi \quad (i, j = 1, 2, \cdots),$$

並且

$$\overline{U}_i \cap A = \phi, \quad \overline{V}_j \cap B = \phi \quad (i, j = 1, 2, \cdots).$$

令

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

那末 U, V 是 E 中的開集, 並且

$$U \supset B, \quad V \supset A, \quad U \cap V = \phi.$$

從而 E 的正規性證明了.

定理 7 (Ю. Смирнов 1948). 設 E 是正規空間, F 是 E 中的閉集. 爲了定義在 F 上的非負值連續函數 f 可以延拓成全 E 上的連續函數 φ, 並且使 φ 在 F 外遍處不等於 0 (即 $x \notin F \Longrightarrow \varphi(x) \neq 0$), 必須且只須函數 f 在 F 中的零點集

$$F(f = 0) \equiv \{x \mid x \in F, f(x) = 0\}$$

是 E 中的 G_δ 型集, 也就是說, 是 E 中可數多個開集的交.

註. 這裏關於函數 f 的非負性假定是不可缺的. 設 E 是數直綫上一個閉區間, 而 F 是由這個閉區間的兩個端點所組成的閉集, 那末不難看出, 如果 f 不是非負的, 滿足定理的要求的延拓是不可能的. 從而定理在這情形下失效.

證. 定理中條件的必要性是顯然的, 因爲 $F(f=0) = E(\varphi=0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(|\varphi| < \frac{1}{n}\right)$, 而 $E\left(|\varphi| < \frac{1}{n}\right)$ 是 E 中的開集.

現在證明條件的充分性. 首先考察 f 是有界的場合. 我們分兩步證明.

1) 設 $F(f=0)$ 是空集, 即 f 在 F 上遍處取正值, 依定理 2, 把 f 延拓到全空間 E 上, 成爲 E 上的連續函數 f_0, 並且 $f_0 \geqslant 0$ (見定理 2 的系). 令 $F_0 = E(f_0 = 0)$, 定義函數 $g(x)$ 如下:

當 $x \in F$ 時, 令 $g(x) = f(x)$,

當 $x \in F_0$ 時, 令 $g(x) = 1$.

由於 $F_0 \cap F = \phi$, $g(x)$ 是 $F \cup F_0$ 上的連續函數. 依定理 2 的系, 把 g 延拓成全 E 上的非負值連續函數 g_0. 令

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f_0(x) + g_0(x)],$$

那末 φ 即是定理中所求的函數.

2) 再設 F 上的連續函數 f 在 F 中的零點集 $F(f=0)$ 是 E 中一個 G_δ 型集 F_0: $F_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n 是 E 中開集. 令

$$F_n = CG_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

f 既然在正規空間 F_n (見定理 2 下註 2) 中的閉集 $F_n \cap F$ 上只取正值, 可以把它延拓成 F_n 上的正值連續函數 φ_n. 定義函數 f_n 如下:

如果 $x \in F_n$, 令 $f_n(x) = \varphi_n(x)$,

如果 $x \in F$, 令 $f_n(x) = f(x)$,

那末 f_n 是閉集 $F \cup F_n$ 上的連續函數. 依定理 2, 把 f_n 延拓成在全空間 E 上的非負值連續函數 ψ_n. 既然假定 f 是有界的, 可以設 ψ_n 是一致有界的(對 n 來說). 令

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi_n(x),$$

那末不難證明 $\varphi(x)$ 是 E 上的連續函數, 並且滿足定理的要求.

由於 $[0, +\infty]$ 與 $[0, 1]$ 的同胚性, 定理的一般情形可以由上面假設 f 有界的情形推出.

值得注意, 與滿足其它分離性公理的空間不同, 正規空間的積不一定是正規的. 見丁石孫的論文[北京大學學報 1956 (2)].

§5. 全正規空間與完正規空間

在前節中曾指出，正規空間的閉子空間仍是正規的．但正規空間不同於以前所述的各型空間，即它的一般子空間不必是正規的．

例（Тихонов 1929）．設 ω 是第一個超窮序數，ω_1 是第三類的第一個超窮序數，即第一個不可數的超窮序數．設 S 表示集

$$S=\{(\alpha,\ \beta)|\alpha\leqslant\omega_1,\ \beta\leqslant\omega\},$$

這裏 α，β 都表示序數．對於序數 $\alpha_1<\alpha$，$\beta_1<\beta$，令

$$V_{\alpha_1,\beta_1}=\{(p,\ q)|\alpha_1<p<\alpha+1,\ \beta_1<q<\beta+1\},$$

而取

$$\mathfrak{V}((\alpha,\ \beta))=\{V_{\alpha_1,\beta_1}\}_{\alpha_1<\alpha,\ \beta_1<\beta}$$

作爲點 $(\alpha,\ \beta)$ 在 S 中的鄰域組．在第三章中將證明這樣 S 成爲正規空間．但它的子空間 $S_1=S\setminus\{(\omega_1,\ \omega)\}$ 不是正規空間，因爲 $A=$ $=\{(\alpha,\ \omega)|\alpha<\omega_1\}$ 與 $B=\{(\omega_1,\ \beta)|\beta<\omega\}$ 是兩個不相交閉集，並且不存在不相交開集 U，V，使 $U\supset A$，$V\supset B$．事實上，設開集 G 包含 B，那末 G_0 包含每個點 $(\omega_1,\ \beta)$ 的一個鄰域．因此 G 包含凡使 $\alpha>$ 一個第二類序數 α_β 的偶 $(\alpha,\ \beta)$．諸 β 既然共有可數多個，必存在一個第二類序數 α_0，使 α_0 超過一切 α_β．因此，如果 $\alpha>\alpha_0$，$\beta<\omega$，那末 $(\alpha,\ \beta)\in G$．所以，如果 $\alpha>\alpha_0$，必然 $(\alpha,\ \omega)\in\overline{G}$，即 $\overline{G}\cap A\neq\phi$．如果有開集 V 使 $V\supset A$，那末 $V\cap G\neq\phi$，從而 S_1 不是正規的．

定義 1． 一個拓撲空間叫作全正規的，是指它的每個子空間是正規的．

註．全正規空間的每個子空間必是全正規的．特別是，全正規空間必是正規的．但上面的例說明正規空間不必是全正規的．

例．如果 E 是全序集，附以拓撲結構 $\mathfrak{T}_-$（見第一章 §1 定義 1 下例 5），那末 E 成爲全正規空間[參看下面的定理，證明留給讀者]．

定理 1． 爲了拓撲空間 E 是全正規的，必須且只須對於其中任意兩個相互隔離的集（見第一章 §5 定義 2）A 與 B，必存在不相交的開集 U 與 V，使 $U\supset A$，$V\supset B$．

證. 1) 必要性. 設E是全正規空間, 並設A, B是E中兩個相互隔離集, 即

$$A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\phi.$$

令

$$G=C(\overline{A}\cap\overline{B}),$$

那末$G\cap\overline{A}$與$G\cap\overline{B}$是子空間G中的不相交閉集. 依假定, G是正規空間, 所以G中有不相交的開子集G_1, G_2, 使

$$G_1\supset G\cap\overline{A},\quad G_2\supset G\cap\overline{B}.$$

$G_i\ (i=1,2)$既是E中開子空間G的開集, 它也必是E的開集. 既然$G_1\supset G\cap\overline{A}\supset C\overline{B}\cap\overline{A}\supset A\cap\overline{A}=A$, 且同理$G_2\supset G\cap\overline{B}\supset B$, 所以$G_1$, G_2就是定理中所求的開集U, V.

2) 充分性. 設E是滿足定理中條件的拓撲空間, 設A是E中一個子空間, 並設F_1, F_2是A中兩個不相交閉集, 於是必然$F_1=\overline{F}_1\cap A$, $F_2=\overline{F}_2\cap A$, 從而

$$\overline{F}_1\cap F_2=\overline{F}_2\cap F_1=\overline{F}_1\cap A\cap\overline{F}_2=F_1\cap F_2=\phi.$$

依假定可取E中不相交開集U, V, 使

$$U\supset F_1,\quad V\supset F_2.$$

所以, 在A中,

$$F_1\subset U\cap A,\quad F_2\subset V\cap A,$$

而$U\cap A$, $V\cap A$是A中的不相交開集, 從而A是正規空間. A既是E的任意子空間, 所以E是全正規空間.

定義 2 (Веденисов). 一個拓撲空間叫作完正規的, 是指它是正規的, 並且其中任意閉集是一個G_δ型集.

例. 數直綫就是一個完正規空間.

定理 2. 設A, B是完正規空間E中兩個不相交閉集, 那末E上必有一個實值連續函數$g(x)$, 使

$$x\in B\Longrightarrow g(x)=1;$$

而在全空間E上, $0\leqslant g(x)\leqslant 1$, 並且

$$A=E(g=0),$$

即A恰是函數g的零點集.

證. 依定義 2,必存在可數多個開集 $G_i(i=1,2,\cdots)$,使

$$A=\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i.$$

必要時,用 $G_i\cap CB$ 代替 G_i,無妨設對於每個 i, $G_i\cap B=\phi$. 空間既是正規的,E 上必有連續函數 g_n,使

$$x\in A\Longrightarrow g_n(x)=0,$$
$$x\in B_n\equiv CG_n\Longrightarrow g_n(x)=1,$$

而在 E 上,$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 令

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g_n(x),$$

仿§4 定理 2 的證明,可推證 $g(x)$ 是連續函數,並且在 E 上 $0\leqslant g(x)\leqslant$ $\leqslant 1$. 如果 $x\in B$,那末對於每個 n, $x\in B_n$,從而對於每個 n, $g_n(x)=1$, 所以 $g(x)=1$. 如果 $x\in A$,那末每個 $g_n(x)=0$,所以 $g(x)=0$. 反之,設 $x\in A$,那末至少有一個 n,使 $x\notin G_n$,從而 $g_n(x)=1$, $g(x)\neq 0$. 證完.

定理 3. 爲了 (T_1) 型拓撲空間 E 是完正規的,必須且只須對於 E 中任意兩個不相交閉集 A 與 B,必在 E 上有一個連續函數 f,使

$$A=E(f=0),\quad B=E(f=1).$$

證. 1) 必要性. 設 E 是完正規的;設 $g(x)$ 是對於閉集 A, B 按照定理 2 作出的那個連續函數. 令

$$G=E\left(g<\frac{1}{2}\right),\quad H=\left(g>\frac{1}{2}\right),$$

$$F_1=E\left(g=\frac{1}{2}\right),\quad F_2=E\left(g\leqslant\frac{1}{2}\right)\equiv G\cup F_1,$$

那末 $F_2\cup H=E$, $F_2\cap B=\phi$,而且不難看出 F_2 是閉集,因爲

$$F_2=\overset{-1}{g}\left(]-\infty,\ \frac{1}{2}]\right).$$

把定理 2 應用到 E 中不相交的閉集 F_2 與 B 上去,並用 1 與 $\frac{1}{2}$ 代替原來用的值 0 與 1 (這可以藉一適當的綫性變換來完成), 於是得出 E 上

的一個連續函數 $g^*(x)$，使在 E 上，$\frac{1}{2}\leqslant g^*(x)\leqslant 1$，而

$$x\in F_2\Longrightarrow g^*(x)=\frac{1}{2},\quad B=E(g^*=1).$$

今定義函數 f 如下：

如果　$x\in F_2$，　令　$f(x)=g(x)$，

如果　$x\in H$，　令　$f(x)=g^*(x)$，

那末在 E 上，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，並且

$$A=E(f=0),\quad B=E(f=1).$$

今證 f 在 E 上連續．事實上，如果 x_0 含在開集 G 或 H 中，那末 $f(x)$ 在 x_0 處的連續性容易看出． 今設 $x_0\in F_1$，那末 $g(x_0)=\frac{1}{2}$，$g^*(x_0)=\frac{1}{2}$．g 與 g^* 旣都是連續函數，對於每個 $\varepsilon>0$，必存在 x_0 的鄰域 V_1, V_2，使

$$y\in V_1\Longrightarrow\left|g(y)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

$$y\in V_2\Longrightarrow\left|g^*(y)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

從而

$$y\in V\equiv V_1\cap V_2\Longrightarrow|f(x_0)-f(y)|=\left|f(y)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

於是 f 在 x_0 點的連續性證明了．

2) 充分性．設 (T_1) 型空間 E 滿足定理的條件，依 §4 定理 1 的 2°，E 是正規空間． 設 F 是不等於 E 的閉集，那末必存在一點 $x_0\in F$，以 F 與 $\{x_0\}$ 代替定理 2 中的集 A 與 B，於是得出一個連續函數 $g(x)$，使在 E 上 $0\leqslant g(x)\leqslant 1$, $g(x_0)=1$, $F=E(g=0)$．令

$$G_n=E\left(g<\frac{1}{n}\right),$$

那末 G_n 是 E 中開集，並且 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，從而 F 是 G_δ 型集．

參考文獻

唐廷, Some chara cterizations of normal and perfectly normal spaces, Duke Math. J., 19 (1952), 289—292.

Dowker, C. H., On a theorem of Hanner, Ark. Mat., 2 (1952), 307—313.

Arens, R., Extension of functions on fully normal spaces, Pac. J. Math., 2 (1952), 11—22.

第三章　緊　性

§1. 緊　空　間

定義 1. 定向半序集Σ叫做定向半序集Δ的子向，是指存在一個由Σ到Δ中的映像f,使對於每個$\delta\in\Delta$，必存在$\sigma\in\Sigma$，使當$\sigma'\in\Sigma$而$\sigma'\geqslant\sigma$時，$\delta'\equiv f(\sigma')$必然$\geqslant\delta$.

例．1）如果$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$是一串嚴格遞增的自然數，那末$\{n_k\}$是$\{n\}_{1,2,\ldots}$的子向，因爲$n_k\to n_k$就是定義中所要求的映像．

2）設$\Delta=\{n\}_{n=1,2,\ldots}$，而$\Sigma=\{\mathscr{P}\}$表示$[0,1]$的一切有窮分割$\mathscr{P}$

$$\mathscr{P}:0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=1$$

的全體按細分關係$\succ$組成的定向半序集．令

$$f(\mathscr{P})=n(\mathscr{P})$$

表示分割$\mathscr{P}$的分點數目，那末，對於任意$n_0\in\Delta$，必存在$\mathscr{P}_0\in\Sigma$，使$n(\mathscr{P}_0)\geqslant n_0$，從而$\mathscr{P}\succ\mathscr{P}_0\Longrightarrow n(\mathscr{P})\geqslant n(\mathscr{P}_0)\geqslant n_0$，即$\Sigma$是$\Delta$的子向．

定義 2. 所謂拓撲空間E中半序點列$\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$的子定向列，是指一個點列$\{x_{f(\sigma)}\}_{\sigma\in\Sigma}$，其中$\Sigma$是$\Delta$的某一子向，而$f$即與此子向相應的映像(如定義1所指出)．

例 1．平常點列$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}(n_1<n_2<n_3<\cdots)$就是$\{x_n\}$的子定向列．

例 2．半序集Δ的子集Δ_1叫做(按$\geqslant$)共尾的子集，是指對於每個$\delta\in\Delta$，必存在$\delta_1\in\Delta_1$，使$\delta_1\geqslant\delta$．這時點列$\{x_{\delta_1}\}_{\delta_1\in\Delta_1}$是點列$\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$的子定向列，因爲相應的$f$乃是不變映像$f(\delta_1)=\delta_1(\delta_1\in\Delta_1)$．這種特殊的子定向列叫做共尾子列．

註. 半序點列的子定向列不必是它的共尾子列. 事實上,子定向列 $\{x_{f(\sigma)}\}_{\sigma\in\Sigma}$ 是按 Σ 定向排列的,並不是按 $f(\sigma)\in\Delta$ 定向排列的!

例. 設把 [0, 1] 中的點良序成集 $\alpha_1\prec\alpha_2\prec\alpha_3\prec\cdots\prec\alpha_{\omega_0}\prec\cdots\prec\prec\alpha_\omega\prec\cdots\prec\alpha_\vartheta\prec\cdots$, $(\vartheta<\omega_\mu)$, 這裏 ω_μ 表示與基數 $\mathfrak{c}$ (連續統的基數)相應的最小序數[1]. [0, 1] 的有窮分割

$$\mathscr{P}:\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=1$$

的全體的基數是

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{c}^2+\mathfrak{c}^3+\cdots+\mathfrak{c}^n+\cdots=\mathfrak{c},$$

從而在 [0, 1] 的有窮分割的全體 Π 與 [0, 1] 之間可以建立一一對應. 於是可以用上面的 $\vartheta<\omega_\mu$ 作 Π 中元 $\mathscr{P}$ 的標號:

$$\Pi=\{\mathscr{P}_\vartheta\,|\,\vartheta<\omega_\mu\}.$$

但 Π 看作半序定向集却是按分割的"加細"而序次的(表示成 $\succ$). 這時,

$$f(\mathscr{P}_\vartheta)=\alpha_\vartheta$$

是由 Π 到全序集 $A=\{\alpha_\vartheta\,|\,\vartheta<\omega_\mu\}$ 上的映像,這映像是一對一的. 對於任意 α_{ϑ_0},既然 $\vartheta_0<\omega_\mu$,集 $\{\vartheta\,|\,\vartheta<\vartheta_0\}$ 的基數 $\aleph_\nu$ 必然 $<\mathfrak{c}$,從而凡出現於任意一個 $\mathscr{P}_\vartheta(\vartheta<\vartheta_0)$ 中的分點的總個數不超過

$$\aleph_0\aleph_\nu=\aleph_\nu<\mathfrak{c},$$

這就是說, [0, 1] 中必有一點 t, 使 t 不是任何 $\mathscr{P}_\vartheta(\vartheta<\vartheta_0)$ 的分點. 取任意以 t 爲其一個分點的分割 $\mathscr{P}_\beta$, 那末對於每個 $\mathscr{P}_{\vartheta'}\succ\mathscr{P}_\beta$, $\mathscr{P}_{\vartheta'}$ 必以 t 爲其一個分點, 從而 $\mathscr{P}_{\vartheta'}$ 必與任何 $\mathscr{P}_\vartheta(\vartheta<\vartheta_0)$ 不同, 換句話說,存在 $\mathscr{P}_\beta$,使

$$\mathscr{P}_{\vartheta'}\succ\mathscr{P}_\beta\Longrightarrow f(\mathscr{P}_{\vartheta'})=\alpha_{\vartheta'}\succ\alpha_{\vartheta_0},$$

而這意味着 Π 是 A 的子向. 但注意 $\{x_{f(\mathscr{P}_\vartheta)}\}$ 並不是 $\{x_{\alpha_\vartheta}\}_{\vartheta<\omega_\mu}$ 的共尾子列!

定理 1. 爲了在一拓樸空間中(半序)點列 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ 含一子定向列收斂於 x, 必須且只須對於每個 $\delta\in\Delta$ 及每個 $V\in\mathfrak{B}(x)$, 存在 $\delta'\in\Delta$, 使

1) 如果承認連續統假設,只須取 $\omega_\mu=\omega_1$.

$$\delta' \geqslant \delta \quad 並且 \quad x_{\delta} \in V.$$

註．定理中的條件也可以改述如下：令

$$A_{\delta_0} = \{x_\delta | \delta \geqslant \delta_0, \delta \in \Delta\},$$

那末定理中的條件乃是說：對於每個 $\delta_0 \in \Delta$ 及每個 $V \in \mathfrak{B}(x)$，必然 $A_{\delta_0} \cap V \neq \Phi$.

證．1）充分性．設定理中條件成立．取

$$S = \{(\delta, V) | \delta \in \Delta, V \in \mathfrak{B}(x)\},$$

並且 S 中的序次定義成

$$(\delta_1, V_1) \succ (\delta_2, V_2) \Longleftrightarrow \delta_1 \geqslant \delta_2, \quad V_1 \subset V_2,$$

於是 S 是一定向半序集．依定理中的條件，對於 S 中每個元 $\sigma \equiv (\delta, V)$，必存在 $\delta' \in \Delta$，使 $\delta' \geqslant \delta$，$x_{\delta'} \in V$．取定這樣的 δ'，並把它表示成 $f(\sigma)$，於是 f 成爲由 S 到 Δ 中的映像．對於每個 $\delta_0 \in \Delta$，取 $\sigma_0 \equiv (\delta_0, V_0) \in S$，那末當

$$\sigma \equiv (\delta, U) \in S \quad 並且 \quad \sigma \succ \sigma_0$$

時，一定 $\delta \geqslant \delta_0$，$U \subset V_0$，從而 $f(\sigma) \geqslant \delta \geqslant \delta_0$，這就是說．$S$ 是 Δ 的子向，$\{x_{f(\sigma)}\}_{\sigma \in S}$ 是 $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ 的子定向列．依上面的作法，對於 x 的每個鄰域 V_0，取 $\sigma_0 = (\delta_0, V_0) \in S$，那末對於每個 $\sigma \succ \sigma_0$，$\sigma \equiv (\delta, U)$，必然

$$f(\sigma) \in \Delta, \quad f(\sigma) \geqslant \delta \geqslant \delta_0, \quad U \subset V_0,$$

並且

$$x_{f(\sigma)} \in U \subset V_0,$$

這就是說，子定向列 $\{x_{f(\sigma)}\}_{\sigma \in S}$ 收斂於 x.

2）必要性．設 $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ 含一子定向列 $\{x_{f(\sigma)}\}_{\sigma \in S}$ 收斂於點 x，那末對於 x 的任意鄰域 V，必存在 $\sigma_0 \in S$，使

$$\sigma \succ \sigma_0 \Longrightarrow x_{f(\sigma)} \in V.$$

但依子定向列的定義，對於任意 $\delta_0 \in \Delta$，存在 $\sigma_1 \in S$，使

$$\sigma \succ \sigma_1 \Longrightarrow f(\sigma) \geqslant \delta_0.$$

由於 S 是定向半序集，存在 $\sigma_2 \in S$，使 $\sigma_2 \succ \sigma_0$，$\sigma_2 \succ \sigma_1$，從而

$$\sigma \succ \sigma_2 \Longrightarrow f(\sigma) \geqslant \delta_0 \quad 且 \quad x_{f(\sigma)} \in V,$$

這就是說,必存在 $\delta\equiv f(\sigma)\geqslant\delta_0$,使 $x_\delta\in V$,這正是定理中的條件. 證完.

系. 在拓撲空間 E 中,設有一半序點列 $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$. 令

$$A_\delta\equiv\{x_{\delta'}\mid\delta'\in\Delta,\ \delta'\geqslant\delta\},$$

那末,爲了

$$x\in\bigcap_{\delta\in\Delta}\overline{A}_\delta,$$

必須且只須 $\{x_\delta\}$ 有一子定向列收斂於 x. 如果 E 是 (T_2) 型空間,並且設點列 $\{x_\delta\}$ 收斂於 x_0,那末

$$\{x_0\}=\bigcap_{\delta\in\Delta}\overline{A}_\delta$$

(即只由一點組成!).

證. 1) 依定理1,爲了 (x_δ) 有一子定向列收斂於 x, 必須且只須 x 的每個鄰域 V 與每個 $A_\delta(\delta\in\Delta)$ 相交, 也就是說, $x\in\overline{A}_\delta$ (每個 $\delta\in\Delta$).

2) 設 E 是 (T_2) 型空間,而 $(x_\delta)\to x_0$; 設 $y\in E$, $y\neq x_0$, 可以取 x_0 的鄰域 U 與 y 的鄰域 V,使 $U\cap V=\phi$. 依照點列收斂的定義,存在 $\delta_0\in\Delta$,使 $A_{\delta_0}\subset U$,從而 $A_{\delta_0}\cap V=\phi$,即 $y\notin\overline{A}_\delta$. 所以

$$\bigcap_{\delta\in\Delta}\overline{A}_\delta=\{x_0\}.$$

定義 3. 拓撲空間 E 叫做緊的, 是指它裏面的每個半序點列必有一子定向列收斂於 E 中的一個元.

註. 這實際上是數學分析中 Bolzano-Weierstrass 定理的一般化,因爲如果只考慮平常的點列[1],上述條件正是那個定理的內容.

定理 2. 爲了一個拓撲空間 E 是緊的, 必須且只須下列的任一個條件成立:

1) 設 E 中有一族閉集,其中每有窮多個都有不空的交, 那末族中全部閉集的交也是不空的.

2) 設 E 中有一族開集 $\mathfrak{M}$,這些開集的併集等於 E,那末從族 $\mathfrak{M}$ 中可以取出有窮多個集來,使它們的併集等於 E.

1) 在第一章裏,我們已說明爲什麽在平常歐幾里得空間中只考慮平常點列就够了.

註．條件 2) 乃是數學分析中 Heine-Borel-Lebesgue 定理的一般化．

證．1)，2) 兩條件由於開集與閉集的對偶關係顯然是等價的．因而只須證明條件 1) 與緊性等價．

設條件 1) 成立．取 E 中一個(半序)點列 $(x_\delta)_{\delta\in\Delta}$．仿前，令

$$A_\delta = \{x_{\delta'} \mid \delta' \in \Delta,\ \delta' \geqslant \delta\},$$

由於 Δ 是定向集，任意有窮多個 A_δ 的交是不空的．依條件 1)，

$$\bigcap_{\delta\in\Delta} \overline{A}_\delta \neq \phi.$$

如果 x_0 是這個交集中的一點，那末依定理 1 的系，(x_δ) 有一子定向列收斂於 x_0，這就是說，E 是緊空間．

反之，設 E 是緊空間，設 $\{F_\iota\}_{\iota\in I}$ 是具有條件 1) 中所述的性質的閉集族．令 $\Phi(I)$ 表示 I 的一切有窮子集所組成的集族．對於每個 $\alpha \in \Phi(I)$，令

$$F_\alpha = \bigcap_{\substack{\iota\in I\\ \iota\in\alpha}} F_\iota.$$

按照假定，每個 $F_\alpha \neq \phi$．$\Phi(I)$ 按包含關係 $\subset$ 形成定向半序集，因為

$$\alpha \in \Phi(I),\quad \beta \in \Phi(I) \Longrightarrow \alpha\cup\beta \in \Phi(I),\quad \alpha\cup\beta \supset \alpha,\ \beta.$$

因此，如果在每個 F_α 中取出一點 x_α 來，

$$(x_\alpha)_{\alpha\in\Phi(I)}$$

是一(半序)點列．依 E 的緊性與定理 1 的系，並仿照前面的推理，令

$$A_\alpha = \{x_{\alpha'} \mid \alpha' \in \Phi(I),\ \alpha' \supset \alpha\},$$

必然

$$\phi \neq \bigcap_{\alpha\in\Phi(I)} \overline{A}_\alpha.$$

但因 $\alpha, \beta \in \Phi(I)$ 並且 $\alpha \supset \beta \Longrightarrow F_\alpha \subset F_\beta$，所以

$$x_\alpha \in F_\alpha \subset F_\beta.$$

於是得知

$$\overline{A}_\alpha \subset \overline{F}_\alpha = F_\alpha,$$

從而

$$\bigcap_{\alpha\in\Phi(I)} F_\alpha \neq \phi.$$

但因

$$\bigcap_{\iota \in I} F_\iota = \bigcap_{\alpha \in \Phi(I)} F_\alpha,$$

定理證完.

註. 如果一個集族中每有窮多個集的交是不空的，這個集族叫做中心族. 定理2中的條件1)可以陳述如下：閉集的中心族中的一切集必有公共點. 條件2)往往陳述成如下形式：從一個(開)覆蓋可以取出一個有窮覆蓋來.

定義 4. 在一拓撲空間E中,集A叫作緊的,是指當把A看作E的子空間時,A是緊空間.

註. 依定理2不難看出,爲了空間中的點集A是緊的,必須且只須由A的每個覆蓋可以取出一個A的有窮覆蓋來.

例. 設E是一個具有最大元(即最後元)的良序集；設任意一點x的鄰域規定爲凡含區間,

$$]z, x] = \{y \mid y \in E, z \prec y \preceq x\}$$

或含

$$]\leftarrow, x] = \{y \mid y \in E, y \preceq x\}$$

的集. 附以這樣的拓撲結構,E是緊空間. 事實上,設$\mathfrak{U} = \{G_\iota\}_{\iota \in I}$是$E$的一個覆蓋,每個$G_\iota$是不空的,由於$\mathfrak{U}$是$E$的覆蓋,故$\exists G_{\iota_1}$含$E$的最大元$a$,從而必含$a$的一個鄰域$]z_1, a]$ $(z_1 \prec a)$. 同理,$\exists G_{\iota_2}$含點z_1,從而必含z_1的一個鄰域$]z_2, z_1]$ $(z_2 \prec z_1)$. 依次可得G_{ι_3}, $]z_3, z_2]$ $(z_3 \prec z_2)$,等等. 假定這一程序可以無限延續下去,那末得出E中的點

$$\cdots \prec z_n \prec z_{n-1} \prec \cdots \prec z_1,$$

而這個子集$\{z_n\}_{n=1,2,\ldots}$沒有第一元，與良序性的假定相背. 從而這一程序只經有窮次就中止,這就意味着存在自然數n_0,使

$$]z_1, a] \cup \bigcup_{k=1}^{n_0}]z_{k+1}, z_k] = E.$$

於是由$\mathfrak{U}$中可以取出有窮覆蓋$\{G_{\iota_i}\}_{1 \leq i \leq n_0+1}$,$E$的緊性證完.

定理 3. 在一(T_2)型拓撲空間中,緊集一定是閉的.

證. 設A是(T_2)型空間中的緊集. 取$x_0 \in \overline{A}$, 依第一章§1定義

6，由 A 中可取出一個收斂於 x_0 的半序點列 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ 來．A 既是緊集，依定義 1，(x_α) 有一個子定向列 $(x_{f(\sigma)})$，使 $(x_{f(\sigma)})$ 收斂於 A 中的一點 y．依定理 1 的系，如果 $A_\alpha = \{x_{\alpha'} \mid \alpha' \in \Delta,\ \alpha' \geqslant \alpha\}$，$y \in \bigcap \overline{A}_\alpha$．但依同系，既然 (x_α) 收斂於 x_0，於是 $\{x_0\} = \bigcap\limits_\alpha \overline{A}_\alpha$，

從而

$$y = x_0.$$

因此 $x_0 \in A$．所以 A 是閉集．

註 1．定理 3 的逆不成立．例如數直綫 R 是 (T_2) 型空間，其本身看作 R 中的點集是閉的，但它不是緊的．

註 2．如果不假定空間是 (T_2) 型的，定理 3 的結論不必成立．例如考察第一章 §2 定義 1 下例 3 中的空間 E，並設 A 是 E 中的一個可數集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 且 $A \neq E$，那末，A 中任意半序點列必收斂於 A 中任意點，從而 A 是緊集．但 A 在 E 中並不是閉的，因爲 $\overline{A} = E$．

註 3．在數直綫中，爲了一個點集是緊集，必須且只須它是閉有界集．

定理 4．在一緊空間中，凡閉集必是緊集．

證．由定義直接推出．

定理 5．在拓撲空間中，爲了有窮多個閉集的併集是緊集，必須且只須那些集本身都是緊的．

證．由定義 4 下的註與定理 4 推出．

定理 6．緊空間 E 映在一個拓撲空間 E_1 中的連續像必是 E_1 中的緊集．

證．設 f 是由 E 到 E_1 中的連續映像．取 $f(E)(\subset E_1)$ 中的一個半序點列 (y_α)．在 E 中取 x_α，使 $f(x_\alpha) = y_\alpha$．(x_α) 成爲緊空間 E 中的半序點列，從而它含一子定向列 $(x_{g(\sigma)})_{\sigma\in\Sigma}$，使這個子定向列收斂於 E 中一點 x_0．由於 f 的連續性，(y_α) 的子定向列 $y_{g(\sigma)} = f(x_{g(\sigma)})$ 必收斂於 $f(x_0) \in f(E)$．從而得知 $f(E)$ 是 E_1 中的緊集．

系 1．設 f 是由拓撲空間 E_1 到拓撲空間 E_2 上的連續映像，那末 f 把 E_1 中的緊集映成 E_2 中的緊集．

系 2 (Веденисов, Н. Б.). 設 f 是由緊空間 E_1 到 (T_2) 型空間 E_2 中的連續映像，那末 f 把 E_1 中的閉集映成 E_2 中的閉集。

證。設 A 是 E_1 中的閉集，那末 A 是緊集，所以 $f(A)$ 依定理 6 是 E_2 中的緊集，從而依定理 3，$f(A)$ 是 E_2 中閉集。

系 3. 由一緊 (T_2) 型空間 E_1 到一 (T_2) 型空間 E_2 上的一對一連續映像一定是同胚變換。

證．依系 2，如果 f 是由 E_1 到 E_2 上的一對一連續映像，則 $\overset{-1}{f}$ 是由 E_2 到 E_1 上的連續映像，因為 E_1 中的閉集依映像 $\overset{-1}{f}$ 的全原像是 E_2 中的閉集。

系 4. 設 E 是緊空間，而 R 是其中一個等價關係，那末商空間 E/R 是緊空間。

證。因為由 E 到 E/R 上的典範映像是連續的。

定理 7 (Тихонов). 為了積空間是緊的，必須且只須每個因子空間是緊的。

註。這個定理在汎函分析中起着重要作用。

證。1) 必要性。如果積空間 $E = \Pi_{\iota\in I} E_\iota$ 是緊的，由於由 E 到因子空間 E_ι 上的投影是連續映像，依定理 5，每個 E_ι 是緊的。

2) 充分性。設每個因子空間 E_ι 是緊的 $(\iota \in I)$。考察 E 中一族閉集：$\mathfrak{f} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$。設任意有窮多個 F_α 的交是不空的，我們要證明 $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \phi$。依 Zorn 輔助定理，$\mathfrak{f}$ 包含在一個集族 $\mathfrak{H} = \{H_\beta\}_{\beta\in B}$ 中(這裏 H_β 不必是閉集)，而任意有窮多個 H_β 的交是不空的，並且 $\mathfrak{H}$ 是具有這樣屬性的集族中之極大族，換句話說，再把一個不在 $\mathfrak{H}$ 中的集添加到 $\mathfrak{H}$ 時，這集與 $\mathfrak{H}$ 中某有窮多個集的交就可能是空的了。不難看出，$\mathfrak{H}$ 中任意有窮多個 H_β 的交仍是 $\mathfrak{H}$ 中的集，而且如果 E 中一集 D 與 $\mathfrak{H}$ 中每個 H_β 有不空交，那末這集 D 也是 $\mathfrak{H}$ 中的集。這些屬性都是 $\mathfrak{H}$ 的極大性的必然後果。

令 f_ι 表示由 E 到 E_ι 上的投影：$x \equiv (x_\iota) \to x_\iota$；令 $\mathfrak{G}_\iota = \{\overline{f_\iota(H_\beta)}\}_\beta$。$\mathfrak{G}_\iota$ 是 E_ι 中一個閉集族，並且其中任意有窮多個集的交是不空的。依 E_ι 的緊性，存在一點

$$x^0_\iota \in \bigcap_{\beta \in B} \overline{f_\iota(H_\beta)}.$$

取 $x_0=(x^0_\iota)$,並取 x_0 在E中的一個鄰域 V. V 必定包含一個如下形狀的鄰域:

$$V_{\iota_1}\times\cdots\times V_{\iota_n}\times\prod_{K\neq\iota_m}^{1\leqslant m\leqslant n} E_k,$$

這裏 V_{ι_k} 是 $x_{\iota_k}(1\leqslant k\leqslant n)$ 的鄰域,那末

$$V_{\iota_k}\cap f_{\iota_k}(H_\beta)\neq\phi\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

所以

$$\left(V_{\iota_k}\times\prod_{\iota\neq\iota_k}E_\iota\right)\cap H_\beta\neq\phi,\ (1\leqslant k\leqslant n).$$

這裏 $\beta\in B$ 既是任意的,依上述,

$$V_{\iota_k}\times\prod_{\iota\neq\iota_k}E_\iota\in\mathfrak{H},\quad(1\leqslant k\leqslant n).$$

依上述 $\mathfrak{H}$ 的屬性,上式中 n 個集的交

$$V_{\iota_1}\times\cdots\times V_{\iota_n}\times\prod_{\iota\neq\iota_k}^{1\leqslant k\leqslant n}E_\iota$$

也含在 $\mathfrak{H}$ 中,這就是說,V 與 $\mathfrak{H}$ 中每個集相交,從而更與 $\mathfrak{f}$ 中每個集相交. V 既是 x_0 的任意鄰域,可知對於每個 $\alpha\in A$, $x_0\in\overline{F}_\alpha=F_\alpha$. 證完.

例. 任意多個(有窮多個、可數無窮多個、或不可數無窮多個)有窮閉區間的積空間必是緊空間,叫作緊平行體. 特別,如果每個因子空間是區間 $[0,1]=I$, 而 α 表因子的數目或勢,那末積空間 I^α 叫作緊正方體.

定理 8. 緊(T_2)型空間必是正規的空間,從而也是正則的、全正則的.

證. 考察緊(T_2)型空間E中兩個不相交閉集A與B. 依定理 3, A與B都是緊集. 考察A中任意點x與B中任意點y. 空間既是(T_2)型的,可以各取 x, y 的開鄰域

$$U^y_x \quad 與 \quad V^x_y,$$

使
$$U_x^y \cap V_y^x = \phi.$$
固定 y，那末
$$\{U_x^y \mid x \in A\}$$
是集 A 的覆蓋．由於 A 的緊性，可以取有窮多個
$$U_{x_1}^y, U_{x_2}^y, \cdots, U_{x_n}^y,$$
使它們組成 A 的覆蓋．令
$$O^y = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}^y, \quad V_y = \bigcap_{i=1}^n V_y^{x_i},$$
那末對於每個 $y \in B$，O^y 是含 A 的開集，V_y 是 y 的開鄰域，而且
$$O^y \cap V_y = \phi.$$
$\{V_y \mid y \in B\}$ 是緊集 B 的覆蓋，所以可以取有窮多個
$$V_{y_1}, \cdots, V_{y_m} \quad (y_1, \cdots, y_m \in B),$$
使它們組成 B 的覆蓋，即
$$\bigcup_{i=1}^m V_{y_i} \supset B.$$
令
$$V = \bigcup_{i=1}^m V_{y_i}, \quad U = \bigcap_{i=1}^m O^{y_i},$$
那末 U 與 V 各是含 A 與 B 的開集，並且
$$U \cap V = \phi.$$
空間的正規性證完．

註． 緊 (T_2) 型空間不必是全正規的．

例． 在第二章 §5 開端的例中，S 是兩個緊 (T_2) 型空間（見定義 4 下的例）的積空間，從而 S 也是緊 (T_2) 型空間．既然 S_1 是 S 的子空間，並且 S_1 是非正規的，S 必然不是全正規的．

定理 9（H. Wallman）．每個拓撲空間 E 可以看成是一個緊空間 S 中的稠集，換句話說，存在一個緊空間 S，使 E 同胚於 S 中的一個稠集．如 E 是 (T_0) 型或 (T_1) 型或正規的，那末 S 也是那一型的．

證． 設 φ 表示 E 中一個閉集和一個有窮集的併．所謂基本集，是指一個集族 $\mathfrak{F} = \{\varphi_\alpha\}$，其中每個 φ_α 是像上面 φ 那樣的集，而任意有窮多個 φ_α 的交是不空

的．依 Zorn 輔助定理，$\mathscr{E}$ 包含在一個依這性質極大的集族中．後者叫作極大基本集．取一切極大基本集的全體，表示成 S． 如果 $X \in S$，那末 $X = \{\varphi_a\}$，φ_a 稱作 X 的坐標． 既然 X 是極大基本集，其坐標中任意有窮多個的交必仍是它的一個坐標，而凡與 X 的一切坐標相交的集 φ 必也是 X 的坐標．注意 E 的閉集都是 φ．

如果 $x \in E$，$\{x\}$ 也是一個集 φ，從而是某一極大基本集 $X = \{\varphi_a\}$ 的坐標．X 既是基本集，$\varphi_a \in X \Longrightarrow \{x\} \cap \varphi_a \neq \emptyset$，也就是說 $x \in \varphi_a$，從而，由於 $\{x\}$ 本身是 X 的一個坐標，

$$\bigcap_a \varphi_a = \{x\}.$$

如果 $\{x\}$ 也是 S 中另一元 $X_1 = \{\varphi_b^{(1)}\} \neq X$ 的坐標，那末 $\exists \varphi_b^{(1)} \notin X$． 但 $x \in \varphi_b^{(1)}$，所以 $\varphi_b^{(1)}$ 添加到 X 中仍成爲一個基本集，與 X 是極大基本集的假定相背．所以 E 中每個點 x 恰是 S 中一個元 X 的坐標，今將 X 表示成 $X(x)$． 如 $x \neq x'$，那末 $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$，所以 $x' \notin X(x)$，從而 $X(x') \neq X(x)$． 因此，$T: x \to X(x)$ 是由 E 到 S 中的一對一映像．

設 $X \in S \setminus T(E)$．如果 $\varphi_a \in X$，那末

$$\varphi_a = F_a \cup \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_r\},$$

F_a 是 E 中閉集，而 $x_i \in E$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$，$r$ 是自然數（或 0）．既然 $X \neq T_{x_i}$，沒有一個 x_i 能屬於 X 的一切坐標，所以

$$\varphi_{a_i} = \varphi_a \setminus \{x_i\}, \quad i = 1\ 2 \cdots r$$

都是 X 的坐標．因

$$F_a = \bigcap_{i=1}^{r} \varphi_{a_i},$$

從而 F_a 也是 X 的坐標，這就是說，如果 $X \in S \setminus T(E)$ 有一坐標 $\varphi_a = F_a \cup \cup \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$，那末 F_a 是 X 的坐標．

現在決定 S 的拓撲結構如下．設 F 是 E 中的閉集，而 $\Phi(F)$ 表示 S 中凡以 F 爲一個坐標的一切點所組成的集，不難驗明，

$$\Phi(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi(E) = S, \quad F \neq F_1 \Longleftrightarrow \Phi(F) \neq \Phi(F_1),$$

這裏 F，F_1 是 E 中的閉集．最後一式成立，是因爲

$$F \neq F_1 \Longleftrightarrow \exists x \in E,\ x \in F \text{ 而 } x \notin F_1 \text{（或 } x \in F_1,\ x \notin F\text{）} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow X(x) \in \Phi(F),\ X(x) \notin \Phi(F_1).$$

又如果 $\{F_a\}$ 是 E 中有窮多個閉集，那末

$$\Phi(\cap F_a) = \cap \Phi(F_a),$$

因為為了 X 以 $\cap F_\alpha$ 為坐標,必須且只須 X 以每個 F_α 為坐標. 如果 $F \subset F_1$(F, F_1 是 E 中閉集),那末 $\Phi(F) \subset \Phi(F_1)$. 現在證明

$$\Phi(F \cup F_1) = \Phi(F) \cup \Phi(F_1).$$

事實上,設 $F_2 = F \cup F_1$. 既然 $F_2 \supset F$, $F_2 \supset F_1$, 那末 $\Phi(F) \subset \Phi(F_2)$, $\Phi(F_1) \subset$ $\subset \Phi(F_2)$,所以

$$\Phi(F) \cup \Phi(F_1) \subset \Phi(F_2).$$

設 $X \in \Phi(F_2) \setminus \Phi(F_1)$,那末 F_2 是 X 的坐標,而 F_1 不是 X 的坐標,因此 X 一定有有窮多個坐標 φ_{α_i} 之交 φ,使 F_2 是一個 φ_{α_i},而 $\varphi \cap F_1 = \phi$. 因為 X 是極大基本集,所以 φ 必是 X 的坐標,所以 $\varphi \subset F_2 \setminus F_1 \subset F$,即 $X \in \Phi(F)$. 從而

$$\Phi(F \cup F_1) = \Phi(F) \cup \Phi(F_1).$$

取 $G = E \setminus F$,而令 $\Omega(G) = S \setminus \Phi(F)$,那末 S 中一點 X 含在 $\Omega(G)$ 中的必要且充分的條件乃是 X 不以 F 為它的坐標,換句話說,必須且只須 X 有一坐標 $\varphi \subset G$. 依已經證明了的諸關係,可得 $\Omega(\phi) = \phi$, $\Omega(E) = S$,

$$G_1 \neq G_2 \Longleftrightarrow \Omega(G_1) \neq \Omega(G_2). \tag{1}$$

如 $\{G_\alpha\}$ 是 E 中有窮多個開集,那末

$$\Omega(\cup G_\alpha) = \cup \Omega(G_\alpha), \tag{2}$$

$$G \subset G_1 \Longrightarrow \Omega(G) \subset \Omega(G_1), \quad \Omega(G \cap G_1) = \Omega(G) \cap \Omega(G_1).$$

如果 $\mathfrak{O} = \{O\}$ 是凡可以表示成一些 $\Omega(G)$(G 是 E 中開集)的併集的集所組成的族,那末 $\mathfrak{O}$ 滿足第一章 §1 定理 10 的條件 O_1—O_-,從而取 $\mathfrak{O}$ 為 S 的開集族,那末 S 成為拓撲空間. 現在證明 S 是緊空間. 由於 $\mathfrak{O}$ 與作 $\Omega(G)$ 形狀的諸集的關係,只須證明:如果 $\mathfrak{U} = \{\Omega(G_\alpha)\}_\alpha$ 組成 S 的覆蓋(G_α 是 E 中開集),那末從 $\mathfrak{U}$ 可以取出一個有窮覆蓋來. 事實上,如 $\mathfrak{U}$ 中任意有窮多個集的併不是 S,那末依(2)與(1)可知任意有窮多個 G_α 的併不是 E,就是說,諸 $F_\alpha \equiv E \setminus G_\alpha$ 中任意有窮多個的交不是空集,從而 $\{F_\alpha\}$ 是一基本集. 於是有一極大基本集 X,以諸 F_α 為坐標,那末對於每個 α, $X \in \Phi(F_\alpha)$,所以

$$\cap \Phi(F_\alpha) \neq \phi,$$

與 $\mathfrak{U}$ 是覆蓋的假定相背. 所以 S 的緊性證完.

剩下的只是證明 $T(E)$ 在 S 中稠密,並且 T 是同胚映像.

設 $x \in G$(G 是 E 中開集),那末 $X(x)$ 不以 $F \equiv E \setminus G$ 為其坐標,從而 $X(x) \in \Omega(G)$. 反之,如 $X(x) \in \Omega(G)$,那末 $X(x)$ 有一個包含在 G 中的坐標 φ,而 $x \in \varphi$,所以 $x \in G$. 因此,

$$x \in G \Longleftrightarrow X(x) \in \Omega(G) \cap T(E).$$

由於 S 中開集的構成，T 把 E 中的開集與 $T(E)$ 中的開集之間成立一一對應．因此 T 把 E 同胚地映像在 S 中．

E 中每個開集 G 至少含一點 x，所以 $\Omega(G)$ 包含 $X(x) = T(x) \in T(E)$，於是 $\Omega(G)$ 與 $T(E)$ 相交，而 $S \setminus T(E)$ 不包含任何 $\Omega(G)$，即 $S \setminus T(E)$ 不含 S 中任何開集．所以 S 中每個開集含 $T(E)$ 的點，即 $T(E)$ 在 S 中是稠的．

最後，證明關於分離性的結論．取 S 中兩不同點 X 與 X_1，先設它們都含在 $T(E)$ 中，從而 $X = X(x)$，$X_1 = X(x_1)$，這裏 $x, x_1 \in E$，$x \neq x_1$．首先設 E 是 (T_0) 型的，那末無妨設有一開集 $G \subset E$，G 含 x 而不含 x_1．x 與 x_1 既各是 X 與 X_1 的坐標，$X \in \Omega(G)$，$X_1 \notin \Omega(G)$，從而 X 與 X_1 滿足 (T_0) 分離性．再設 X 與 X_1 中有一個 $\notin T(E)$，X 與 X_1 必有不相交的坐標 φ_α 與 φ'_β．設

$$\varphi_\alpha = F_\alpha \cup \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_k\},$$

那末依本證明的前面部分，F_α 也是 X 的坐標，而 $F_\alpha \cap \varphi'_\beta = \phi$．所以如果 $G = E \setminus F_\alpha$，那末 $X \notin \Omega(G)$，$X_1 \in \Omega(G)$．於是證明了 S 是 (T_0) 型的．

再設 E 是 (T_1) 型的．既然 E 中的由一個點組成的集都是閉的，凡 φ_α 都是閉集．如果 $X \neq X_1$，$X, X_1 \in S$，那末它們必有不相交的坐標 F_α，F'_β，所以 $\Omega(E \setminus F'_\beta)$ 與 $\Omega(E \setminus F_\alpha)$ 各是 X，X_1 的鄰域，而前者不含 X_1，後者不含 X．所以 S 是 (T_1) 型的．

設 E 是正規空間．取 X 與 X_1 的不相交坐標 F_α，F'_β．E 既是正規的，存在不相交開集 G，G_1，$G \supset F_\alpha$，$G_1 \supset F'_\beta$．所以 $\Omega(G)$ 與 $\Omega(G_1)$ 各是 X 與 X_1 在 S 中的鄰域，並且它們不相交．因此 S 是 (T_2) 型的．S 既然又是緊的，依定理 7，S 是正規的．

註．如果 E 是 (T_2) 型的，S 不一定是 (T_2) 型的．這事實由下面的定理可以推得．

定理 10．為了拓撲空間 E 是一個緊 (T_2) 型空間的子空間，必須且只須 E 是全正則的．

註．設 E 是 (T_2) 型的．在定理 8 中，如果假定 E 是 (T_2) 型就可以推出 S 是 (T_2) 型，那末依本定理，E 必是全正則的．這不可能，因為 (T_2) 型空間不必是全正則的(見第二章)．

證．1) 必要性．設 E 是緊 (T_2) 型空間 S 的子空間，那末依定理 8，S 是全正則的；而依第二章 § 3 定理 1 下的註，它的子空間 E 也是全正則的．

2）充分性．設E是全正則空間，那末依第二章§3定理1的5°及本章定理7下的例，可知E是一個緊（T_2）型空間的子空間．

定理 11． 爲了拓撲空間E是一個正規空間的子空間，必須且只須E是全正則的．

註．定理10和定理11說明全正則空間在拓撲學中的普遍性．

證．如果E是正規空間S的子空間，那末，由於S必是全正則的，E也是全正則的．反之，逆命題可以與定理10的充分性一樣地證明．

定理 12． 爲了拓撲空間E是緊的，必須且只須其中任一良序族的遞減不空閉集必有非空的交，即如果

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_\alpha \supset \cdots, \quad F_\alpha \neq \phi, \quad F_\alpha = \overline{F}_\alpha,$$

（α是不超過一個固定序數α_0的序數）　　(3)

那末

$$\bigcap_{\alpha<\alpha_0} F_\alpha \neq \phi.$$

證．1）必要性．設E是緊空間，而$\{F_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$是滿足條件(3)的一族不空閉集．取其中任意有窮多個$F_{\alpha_1}, \cdots, F_{\alpha_n}$，無妨設$\alpha_1<\alpha_2<\cdots$ $\cdots<\alpha_n$，那末

$$\phi \neq F_{\alpha_n} = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i},$$

從而$\{F_\alpha\}$是緊空間E中一個具有窮交性質的閉集族，所以$\cap_{\alpha<\alpha_0} F_\alpha \neq$ $\neq \phi$．

2）充分性．設E滿足定理中的條件．姑設E不是緊的，那末E中必有一開集族$\mathfrak{G} = \{G_\iota\}_{\iota\in I}$，使$\mathfrak{G}$組成$E$的覆蓋，並且任意有窮多個$G_\iota$的併不是$E$．今取$\mathfrak{G}$爲滿足上述條件且勢爲最小的覆蓋，這樣，$\mathfrak{G}$的勢一定是無窮的．我們把$\mathfrak{G}$中的集良序成$\{G_\alpha\}$，使對於每個$G_\alpha\in\mathfrak{G}$，當$\mathfrak{G}_\alpha$表示集族

$$\mathfrak{G}_\alpha = \{G_\beta \mid G_\beta \in \mathfrak{G},\ \beta < \alpha\}$$

時，$\mathfrak{G}_\alpha$的勢小於$\mathfrak{G}$的勢．事實上，只須證明可以作一個與$\mathfrak{G}$等勢的良序集$\mathfrak{Y}$，使$\mathfrak{Y}$的任意段$\mathfrak{Y}_\alpha = \{x_\beta \mid x_\beta \in \mathfrak{Y},\ \beta < \alpha\}$的勢小於$\mathfrak{Y}$的勢——因爲這樣藉$\mathfrak{Y}$與$\mathfrak{G}$之間的一一對應就可以使$\mathfrak{G}$良序如上了．如果$\mathfrak{G}$

本身就已經這樣地良序了，那末證明已經完了．否則，必存在 $G_\alpha \in \mathfrak{G}$，使 $\mathfrak{G}_\alpha$ 的勢等於 $\mathfrak{G}$ 的勢．設 α_0 是滿足這一條件的諸 α 之中的第一個，那末如果 $G_\beta \in \mathfrak{G}_{\alpha_0}$，必然 $\beta < \alpha_0$，從而 $\mathfrak{G}_\beta$ 的勢小於 $\mathfrak{G}$ 的勢（$= \mathfrak{G}_{\alpha_0}$ 的勢）．於是 $\mathfrak{G}_{\alpha_0}$ 就是所求的良序集 $\mathfrak{Y}$．

設 $G_\alpha \in \mathfrak{G}$，而令 X_α 表示 E 中不在任何 G_β（$\beta \leqslant \alpha$）中的點所組成的集．X_α 不是空的，因爲否則 $\mathfrak{G}_\alpha \cup \{G_\alpha\}$ 組成 E 的覆蓋，而這一集族是 $\mathfrak{G}$ 的子族，並且 $\mathfrak{G}_\alpha \cup \{G_\alpha\}$ 的勢等於 $\mathfrak{G}_\alpha$ 的勢（因爲 $\mathfrak{G}_\alpha$ 是具有無窮勢的），於是依關於 $\mathfrak{G}$ 的勢的極小性假定，$\mathfrak{G}_\alpha$ 的勢等於 $\mathfrak{G}$ 的勢，與上面所設 $\mathfrak{G}_\alpha$ 的勢小於 $\mathfrak{G}$ 的勢相背．由此，$\{\overline{X}_\alpha\}_\alpha$ 是一個遞減的不空閉集的良序列，依定理的假定，$\cap_\alpha \overline{X}_\alpha$ 至少含一個點 x_0．但

$$X_\alpha \subset CG_\alpha = \overline{CG}_\alpha,$$

所以 $x_0 \in CG_\alpha$，即 x_0 不屬於任意 $G_\alpha \in \mathfrak{G}$，與 $\mathfrak{G}$ 是 E 的覆蓋這一假定相背．證完．

定義 5． 設 A 是拓撲空間 E 中的點集．E 中一點 x_0 叫作集 A 的極密集點，是指對於 x_0 的任意鄰域 V，$V \cap A$ 與 A 是等勢的．

註．極密集點必也是積集點；但反之不眞．

例．在數直綫 R 中，一區間的端點是這區間的極密集點，又設 A 表示 R 中 0 到 1 之間一切有理數點與區間 $[1, 2]$ 合併組成的集，那末 0 是 A 的積集點，但不是 A 的極密集點．

定理 13（Chittenden）．爲了拓撲空間 E 是緊的，必須且只須其中每個無窮集必有一極密集點．

註．這是數學分析中 Bolzano-Weierstrass 定理推廣的另一形式．

證．必要性．設 E 是緊空間；設有一無窮集 A 無極密集點，那末對於每個 $a \in E$，必有 a 的一個鄰域 V_a，使 $V_a \cap A$ 的勢小於 A 的勢．$\{V_a\}_{a \in E}$ 是 E 的覆蓋，依 E 的緊性，存在有窮多個點 $a_1, \cdots, a_n$，使 $\{V_{a_i}\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是 E 的覆蓋．這樣，

$$\bigcup_{i=1}^{n} (V_{a_i} \cap A) = A.$$

但如果有窮多個基數之和等於一個無窮基數，那末和中必有一項與這個無窮基數相等，與上面取V_α時的假定相背．從而A在E中必有一個極密集點．

2）充分性．設拓撲空間E滿足定理中的條件，即E中每一無窮集必有一個極密集點．考察E中一個無窮良序的遞減非空閉集列

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_\alpha \supset \cdots, \quad F_\alpha \neq \varPhi, \quad \alpha < \alpha_0.$$

我們來證明諸F_α的交非空．如果存在一個α，使$F_\alpha = F_{\alpha+1} = \cdots$，那末證明完結．否則可取一序列$\{x_\beta\}$，使$\{\beta\}$是$\{\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$的共尾子列，而

$$x_\beta \in F_\beta \setminus F_{\beta+1}.$$

$\{x_\beta\}$成為一個無窮點集，所以依假定，$\{x_\beta\}$有一極密集點x_0．F_α既是閉的，$\{x_\beta\}_{\beta\geq\alpha}$是$F_\alpha$中無窮點列，所以$x_0 \in \overline{F}_\alpha = F_\alpha$，而這對於一切$\alpha\ (<\alpha_0)$成立．於是依定理12，$E$的緊性證明了．

§2. 絕對閉的(T_2)型空間

定義 1. 所謂拓撲空間E嵌入拓撲空間E_1中，是指E同胚於E_1的一個子空間．這時為簡單起見，也說空間E_1包含空間E[1]．

定義 2. (T_2)型空間E叫作絕對閉的(T_2)型空間，簡稱作H-閉的，是指它在任意含它作子空間的(T_2)型空間中是閉集．

定理 1（Александров-Урысон）．為了(T_2)型空間E是H-閉空間，必須且只須由E的每一覆蓋中可找出有窮多個點集來，使這些點集的併在E中稠密．

證．1）必要性．設E是H-閉空間；設E不滿足定理的條件，那末存在這空間的一個無窮覆蓋$\mathfrak{U} = \{G\}$，使對於$\mathfrak{U}$中任意有窮多個開集$G_1, \cdots, G_n$，$E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{G}_i$是不空的．在$E$中添入$\xi$，使它成為集$E_1 = E \cup \{\xi\}$．今在$E_1$中引入拓撲結構如下．$E$中各點的鄰域仍當作這點在$E_1$中的鄰域，而對於新添入的點$\xi$，對於由$\mathfrak{U}$中任意取出的有窮多個開集$G_1, \cdots, G_n$，令

1）注意空間E_1包含空間E，與集E_1包含集E不同！

$$U(\xi)=\{\xi\}\cup\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{G}_i\right),$$

並取一切這樣作成的 $U(\xi)$ 作爲 ξ 在 E_1 中的基本鄰域組．不難驗明，這些 $U(\xi)$ 確實滿足作爲基本鄰域組的一切要求． 於是 E_1 成爲拓撲空間，並包含 E 作爲它的子空間．爲了證明 E_1 是 (T_2) 型的，只須證明對於任意 $x\in E$，x 與 ξ 在 E_1 中有不相交的鄰域．事實上，只須取 $\mathfrak{U}$ 中含 x 的一個開集 G，並取 $U(\xi)=\{\xi\}\cup C\overline{G}$，那末 $U(\xi)\cap G=\phi$． 既然在 E_1 中每個 $U(\xi)$ 含 ξ 以外的點，ξ 是集 E 在 E_1 中的積集點，所以 E 在 E_1 中不是閉集．於是與 E 是 H-閉空間那一假定矛盾．

2）充分性．今證如果空間 E 滿足定理中的條件，那末它必是 H-閉的． 設 E_1 是一個拓撲空間，其中含一點集 A 與 E 同胚． 取 $\xi\in E_1\setminus A$． 我們要證明 ξ 不是 A 的積集點，換句話說，我們要證明 A 在 $A\cup\{\xi\}$ 中是閉的． 事實上，對於 A 中每一點 x，取它在 $A\cup\{\xi\}$ 中一個開鄰域 U_x，使 $\xi\notin\overline{U}_x$． 這是因爲 $A\cup\{\xi\}$ 是 (T_2) 型空間，從而 ξ 有一鄰域與 x 的一個鄰域 U_x 不相交．U_x 在 A 中是開集，而它在 A 中及在 $A\cup\{\xi\}$ 中的閉包依上述是相同的． $\{U_x\}_{x\in A}$ 是 A 的覆蓋，依假定，由於 A 與 E 的同胚關係，必存在有窮多點 $x_1,\cdots,x_n\in A$，使 $\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U}_{x_i}=A$． 既然每個 $\overline{U}_{x_i}$ 是在 $A\cup\{\xi\}$ 中閉的，它的併也是在 $A\cup\{\xi\}$ 中閉的．於是 A 在 $A\cup\{\xi\}$ 中是閉的．證完．

系．每個緊 (T_2) 型空間必是 H-閉的．

註．本系的逆不成立．事實上，Александров 與 Урысон 第一次作出了 H-閉的非緊空間的例．我們將在下面舉這樣的例．

定義 3．設 E 是拓撲空間，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 中某一集族．所謂 E 中的點 x 屬於集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的拓撲上限集[1]（這集表示成 $\overline{\mathrm{lt}}\,\{E_\alpha\}$），是指 x 的任意鄰域 U_x 必與無窮多個 A_α 相交（即存在無窮多個標號 α_ι，使 $(A_{\alpha_\iota}\cap U_x)\neq\phi$，但諸 A_α 之中可能有相同的集）．所謂點 x 屬於集族 $\{A_\alpha\}$ 的拓撲下限集[1]（這集表示成 $\underline{\mathrm{lt}}\,\{E_\alpha\}$），是指 x 的任意鄰域 V_x 至

1）注意與集論的上限集與下限集不同，這是指

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}A_k,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n}A_k.$$

多與有窮多個 A_α 不相交（即至多有有窮多個標號 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，使 $A_{\alpha_i} \cap V_x = \phi\ (1 \leqslant i \leqslant n)$）.

定理 2（Александров-Урысон）. 爲了 (T_2) 型拓撲空間 E 是 H-閉的，必須且只須其中任意一中心的開集族必有不空的拓撲下限集.

證. 1) 必要性. 設 E 是 H-閉空間，而設 E 中有中心開集族 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$，使

$$\underline{\mathrm{lt}}_{\alpha} \{G_\alpha\} = \phi.$$

今在 E 中添入新點 ξ，而在 $E \cup \{\xi\} = E_1$ 中，規定 ξ 的一個基本鄰域組爲凡作如下形式的集的全體：

$$O_\xi = \{\xi\} \cup (G_{\alpha_1} \cap \cdots \cap G_{\alpha_n}),$$

其中 $G_{\alpha_i} \in \{G_\alpha\}\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，$n$ 是任意自然數. 如果 $x \in E$，那末設 x 在 E_1 中的一個基本鄰域組與 E 中的鄰域組相同. 不難看出，$\{O_\xi\}$ 確實滿足基本鄰域組的定義. 我們證明 E_1 是 (T_2) 型空間. 事實上，取 $x \in E$，那末 $x \notin \phi = \underline{\mathrm{lt}}_{\alpha} \{G_\alpha\}$，從而必存在無窮多個 $\alpha: \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots \in I$，並存在 x 在 E 中的鄰域 V_x，使

$$V_x \cap G_{\alpha_i} = \phi \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

因此，

$$V_x \cap (\{\xi\} \cup G_{\alpha_i}) = \phi,$$

從而 x 與 ξ 是鄰域分離的. 爲了證明定理的必要性，剩下的只是證明在 E_1 中，點 ξ 是 E 的積集點. 事實上，$\{G_\alpha\}$ 既是中心族，ξ 的任意鄰域 O_ξ 必含 E 中的點. 必要性證完.

2) 充分性. 設 E 不是 H-閉空間，那末存在 (T_2) 型空間 $E_1 = E \cup \{\xi\}$，使 ξ 在 E_1 中不是孤立點. 取 ξ 在 E_1 中的一個開鄰域 O_α，那末 $G_\alpha = O_\alpha \setminus \{\xi\}$ 是 E 中的開集. 一切這樣的開集 G_α 組成 E 的中心開集族，因爲任意有窮多個 O_α 的交仍是 ξ 的鄰域，從而與 E 相交. E_1 既是 (T_2) 型空間，對於任意 $x \in E$，必存在它的一個鄰域 V_x 與 ξ 的一個鄰域 O_ξ，使

$$V_x \cap O_\xi = \phi.$$

O_ξ 中必包含無窮多個不同的 ξ 點的鄰域，因爲否則 O_ξ 中只包含 ξ 點的有窮多個鄰域 $O_1, \cdots, O_n$，那末

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} O_k$$

是 ξ 點的鄰域，而這鄰域 U 不能再包含異於 ξ 的點，因爲若 U 含一異於 ξ 的點，則由於空間的 (T_2) 分離性，ξ 仍有一鄰域不含這點，而這鄰域與 U 的交是 ξ 的一個包含在 U 中的鄰域，得出矛盾． 但那樣 ξ 就成爲 E_1 中的孤立點了！ 因此 V_x 與 ξ 的無窮多個鄰域不相交，即 V_x 與無窮多個 $G_\alpha = O_\alpha \setminus \{\xi\}$ 不相交．所以 x 不在 $\underline{\mathrm{lt}}\,\{G_\alpha\}$ 中． x 既是 E 中任意點，所以

$$\underline{\mathrm{lt}}\,\{G_\alpha\} = \varPhi.$$

定理 3. 凡 H-閉正則空間必是緊的．

證．設 $\mathfrak{G} = \{G\}$ 是 H-閉正則空間 E 的覆蓋．對於每點 $x \in E$，取 $\mathfrak{G}$ 的一個開集 U_x，使 $U_x \ni x$．依空間的正則性，取 x 的開鄰域 V_x，使 $\overline{V}_x \subset U_x$． $\{V_x\}_{x \in E}$ 也是 E 的覆蓋，依空間的 H-閉性及定理 1，可取出有窮多個點 $x_1, \cdots, x_n \in E$ 來，使

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{x_i} = E.$$

於是 $\{U_{x_i}\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 是由 $\mathfrak{G}$ 取出的 E 的有窮覆蓋． E 的緊性證完．

系 1. 爲了 (T_2) 型空間是緊的，必須且只須它是正規的 H-閉空間．

證．1) 必要性．由定理 1 的系與 §1 的定理 7 直接推出．

2) 充分性．因爲正規空間必是正則的．

系 2. 下面幾種類型的拓撲空間是相同的：

1°. 緊 (T_2) 型空間；

2°. 正則緊空間；

3°. 正規緊空間；

4°. 正則 H-閉空間；

5°. 正規 H-閉空間．

註．存在非緊的（事實上，更進一步，存在非正則的）H-閉空間（見定理1下的註）．

例．考察一切數偶

$$\{(\alpha, t): \alpha < \omega_1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

的集 $\Delta(\omega_1)$，這裏 α 是序數，ω_1 是第一個不可數的序數．規定

$$(\alpha, t) < (\alpha', t'),$$

是指

$$\alpha < \alpha' \text{ 而 } t, t' \text{ 任意，或 } \alpha = \alpha' \text{ 而 } t < t'.$$

這時，在 $\Delta(\omega_1)$ 中添加一點 ξ，而組成集

$$E \equiv \Delta(\omega_1) \cup \{\xi\}.$$

在 E 中引入拓撲結構如下：如果 $x = (\alpha, t) \in \Delta(\omega_1)$，那末 x 的鄰域規定為含 x 的任意區間

$$\{(\beta, s) | (\beta_1, s_1) < (\beta, s) < (\beta_2, s_2)\},$$

這裏

$$(\beta_1, s_1) < (\alpha, t) < (\beta_2, s_2),$$

而 $0 \leqslant s_1, s_2 < 1$; $\beta_1, \beta_2 < \omega_1$．對於點 ξ，規定它的鄰域為 O_β，其中 $1 \leqslant \beta < \omega_1$，而

$$O_\beta = \{\xi\} \cup \{(\alpha, t) | \beta \leqslant \alpha < \omega_1, 0 < t < 1\}.$$

這空間是 (T_2) 型的，但在 ξ 點不正則，從而不是緊的．今證它是 H-閉的．

取空間 E 的某覆蓋 $\mathfrak{U}$：$\mathfrak{U}$ 由 E 中點的一些按上面規定的鄰域組成．ξ 既不包含在任意異於 ξ 點 x 的任意鄰域中，在 $\mathfrak{U}$ 中至少有一個 O_β，那末

$$\overline{O}_\beta = \{\xi\} \cup \{(\alpha, t) | \beta \leqslant \alpha < \omega_1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

集

$$E \setminus \overline{O}_\beta = \{(\alpha, t) | 1 \leqslant \alpha < \beta, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

與直綫綫段的積空間同胚，所以是緊的或是緊集的子集．因此，$E \setminus \overline{O}_\beta$ 由 $\mathfrak{U}$ 中有窮多個集覆蓋．這樣，這有窮多個集的閉包與 $\overline{O}_\beta$ 的併等於 E，從而依定理1，E 是 H-閉的．

註．仿效定義 1，似乎也可以提出 (T_0) 型與 (T_1) 型絕對閉的空間的問題．但這兩問題都是不足道的．

我們首先證明，任意不空的 (T_0) 型空間 E 不是絕對閉的，這就是說，必存在一個含它的 (T_0) 型空間 E_1，使 E 在 E_1 中不是閉的． 事實上，令

$$E_1 = E \cup \{\xi\},$$

ξ 是添加到 E 的一個元． 如果 $x \in E$，令 x 在 E_1 中的鄰域等於其在 E 中的鄰域或這種鄰域添加上點 ξ，而令 ξ 的唯一鄰域是 E_1，那末 E_1 是 (T_0) 型的，而 E 在 E_1 中不是閉的，因爲 ξ 是 E 在 E_1 中的積集點．

再考慮絕對閉的 (T_1) 型空間的問題．(T_1) 型空間叫作絕對閉的，是指它在任何包含它的 (T_1) 型空間中是閉集．顯然任意有窮 (T_1) 型空間必是 (T_1) 型絕對閉的． 今證凡無窮 (T_1) 型空間不是 (T_1) 型絕對閉的，從而 (T_1) 型絕對閉空間與有窮空間是等價概念． 事實上，設 E 是無窮的 (T_1) 型空間；設 $E_1 = E \cup \{\xi\}$，而 ξ 是添加於 E 的點． 如果 $x \in E$，那末令 x 在 E_1 中的鄰域等於其在 E 中的鄰域，或這種鄰域再加添點 ξ． 對於點 ξ，取

$$\mathfrak{B}(\xi) = \{CZ \cup \{\xi\} \,[\, Z \text{ 表示} E \text{ 中有窮集}\},$$

那末 E 是 (T_1) 型空間，而 E 在 E_1 中不是閉的，因爲 ξ 是 E 在 E_1 中的積集點．

我們還可以提出絕對閉的全正則空間或正規空間的問題，即什麼全正則(或正規)空間是在任何包含它的全正則(或正規)空間中都是閉的？依 §1 定理 10，凡全正則空間 E 必是一個緊 (T_2) 型空間 E_1 的子空間，而如果 E 在 E_1 中是閉的，那末依 §1 定理 3，E 必是 (T_2) 型緊空間． 反之，依定理 3 系 2，凡 (T_2) 型緊空間必是絕對閉的全正則(正規)空間．

定義 4． 拓撲空間 E 的覆蓋 $\mathfrak{U} = \{G_\iota\}_{\iota \in I}$ 叫作 r 覆蓋，是指 $\mathfrak{U}$ 中每個集 G_ι 的閉包 $\overline{G}_\iota$ 必包含在 $\mathfrak{U}$ 中的一個集 G_K 中；即 $\exists G_K \in \mathfrak{U}$，使 $G_K \supset \overline{G}_\iota$．

定理 4 (Вайнберг, Н. М.)． 爲了正則空間 E 是 (T_3) 型空間類中

的絕對閉的(即它在任何包含它的正則空間中是閉集)，必須且只須由 E 的每個 r 覆蓋可以取出它的一個有窮覆蓋.

證. 1) 必要性. 設 E 是 (T_3) 型空間類中的絕對閉空間；設 $\mathfrak{U}=\{G_i\}$ 是E的一個 r 覆蓋，而姑設其中任意有窮多個元不能形成E的覆蓋. 對於E，添入一點 ξ，令 $E_1=E\cup\{\xi\}$. 在 E_1 中引入拓撲結構如下：如 $x\in E$，那末令 x 在 E_1 中的鄰域與它在E中的相同. 對於 $\mathfrak{U}$ 中任意有窮多個集 $G_i(1\leqslant i\leqslant n)$，$E\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{G}_i$ 不可能是空的，因爲否則依 r 覆蓋的定義，必存在 $G_i^*\in\mathfrak{U}$，使 $G_i^*\supset\overline{G}_i$，從而 $\{G_i^*\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是E的覆蓋，與假定相背. 令

$$U(\xi)=\{\xi\}\cup\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{G}_i\right). \tag{1}$$

這樣，對於 $\mathfrak{U}$ 中任意有窮多個集 $G_i(1\leqslant i\leqslant n)$，可以作一如上的 $U(\xi)$，今取凡這樣的 $U(\xi)$ 作爲 ξ 在 E_1 中一個基本鄰域組——不難證明這個組確能滿足基本鄰域組的條件. 這樣 E_1 成爲拓撲空間. 我們證明 E_1 是正則的，而爲了證明這一步，依定理 1 的證明（由此得知 E_1 是 (T_2) 型空間)與第二章 §2 定理 1，只須證明對於 ξ 的任意鄰域 $U(\xi)$，必有 ξ 的一個鄰域 $V(\xi)$，使 $\overline{V(\xi)}\subset U(\xi)$. 事實上，令 $U(\xi)$ 作(1)中的形狀，而取 $G_i^*\in\mathfrak{U}$，使 $G_i^*\supset\overline{G}_i$. 令

$$V(\xi)=\{\xi\}\cup\left\{E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{G}_i^*\right\},$$

我們證明 $\overline{V(\xi)}\subset U(\xi)$，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{G}_i\subset C\,\overline{V(\xi)}$. 爲此，設 $x_0\in\overline{G}_1$，那末 $x_0\in G_1^*$，而 G_1^* 是 x_0 的鄰域（因爲 G_1^* 是開集），$G_1^*\cap V(\xi)=\phi$，即 $x_0\notin\overline{V(\xi)}$. 從而 E_1 的正則性證明了. 既然 ξ 的每個鄰域 $U(\xi)$ 含 ξ 以外的點，即E中的點(因爲

$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{G}_i\neq\phi),$$

所以 ξ 是E在 E_1 中的積集點，即E不是 E_1 中的閉集，與假定矛盾. 必要性證明了.

2）充分性．設E滿足定理中的條件．取含E的一個正則空間E_1，今等同E與E_1中那個與它同胚的子空間．考$\xi\in E_1\setminus E$．爲了證明E在E_1中是閉的，只須證明ξ不是E的積集點．事實上，對於E中每個點x，可取其在$E\cup(\xi)$中的一個開鄰域U_x，使U_x與ξ的一個(在$E\cup(\xi)$中的)鄰域U_ξ不相交．因爲空間是正則的，U_ξ含ξ的一個鄰域的閉包$\overline{W}_\xi$，從而$C\overline{W}_\xi\equiv V_x$是開集且含$U_x$的閉包$\overline{U}_x$．對於$V_x$，由於$V_x\cap W_\xi=\phi$，依同樣推理可知$\overline{V}_x$含在一個開集中，而這開集不含$\xi$的某一鄰域的閉包．這樣繼續下去，顯然這程序是無止境的．把所有這些集的全體叫作開集族$\mathfrak{U}$，那末$\mathfrak{U}$組成E的一個r覆蓋．依定理的假定，可以由$\mathfrak{U}$中取出有窮多個集$U_1,\cdots,U_n$來，使$\bigcup\limits_{k=1}^{n}U_k\supset E$．依上面已經證明的部分，$\overline{U}_k\subset E$，即$U_k$在$E$中與它在$E\cup\{\xi\}$中的閉包是相同的．因此$E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overline{U}_k$在$E\cup\{\xi\}$中是閉集．證完．

§3.　局部緊空間

定義 1. 拓撲空間E叫作是環繞點$x(\in E)$處緊的，是指這點有一個具有緊閉包的鄰域．拓撲空間E叫作局部緊的，是指E環繞它的每個點是緊的．拓撲空間中的集叫作局部緊集，是指這集看作子空間是一個局部緊空間．

例 1．緊空間必是局部緊的．

例 2．數直綫是局部緊的，但不是緊的．

例 3．設E是一個良序集，附以§1 定義 4 下例中所述的那種拓撲結構，那末，由那個例中的證明不難看出，如果E沒有最大元，E是局部緊空間．

定理 1. 爲了拓撲空間E是局部緊的，必須且只須E有一開基，而這基中的集的閉包都是緊的．

證．1）充分性．不待證．

2）必要性．設E是局部緊的；設$\mathfrak{U}=\{U\}$是E的一個基；$\mathfrak{B}=\{V\}$

表示 E 中凡具有緊閉包的開集所組成的集族．既然 $U \cap V \subset V$，$\overline{U \cap V} \subset \overline{V}$，所以 $\overline{U \cap V}$ 是緊集．如果 W 是開集，而 $x \in W$，那末必存在一個 $U \in \mathfrak{U}$，使 $x \in U \subset W$，並且存在 $V \in \mathfrak{V}$，使 $V \ni x$（定義 1）．於是 $x \in U \cap V \subset W$．所以

$$\{U \cap V \mid U \in \mathfrak{U},\ V \in \mathfrak{V}\}$$

是 E 的基，其中每個集的閉包是緊的．證完．

定義 2（Александров, П. С.）．所謂拓撲空間 E 的單點緊化，是指一個包含 E 的緊 (T_2) 型空間 E_1，使 $E_1 = E \cup \{a\}$ 只比 E 多含一個點．

定理 2. 爲了拓撲空間 E 有單點緊化，必須且只須它是局部緊 (T_2) 型空間．在這樣的條件下，單點緊化（除同胚者不計外）是一意的．

證．1）必要性．設 E 有單點緊化，依定義 2，存在緊 (T_2) 型空間 $E_1 = E \cup \{a\}$．設 $x \in E$，那末由於 E_1 是 (T_2) 型空間，x 有一鄰域 V 與 a 的某鄰域 U 不相交，這就是說，$\overline{V} \subset E$（$\overline{V}$ 表示 V 在 E_1 中的閉包）．由於 E_1 是緊的，依 §1 定理 3，$\overline{V}$ 是緊的．E 的局部緊性證完．

2）充分性．設 E 是局部緊 (T_2) 型空間，對於 E 添加一點 a，於是得出集 $E_1 = E \cup \{a\}$ 來．如果 $x \in E$，則取 x 在 E 中的基本鄰域組作爲它在 E_1 中的基本鄰域組．如果 $x = a$，取 E 中緊集 A，令 $V = E_1 \setminus A$，並且凡這樣的集作爲 a 在 E_1 中的基本鄰域組．由於一個空間中有窮多緊集的併仍是緊集，並且在 (T_2) 型空間中，緊集必是閉集，從而 $E \setminus A$ 是 E 中開集．不難看出上述的集組確實滿足基本鄰域組所應滿足的條件．於是 E_1 成爲拓撲空間．E_1 是 (T_2) 型空間，因爲如果 $x \in E$，那末取 x 在局部緊空間 E 中的一個緊鄰域 V，那末 $E_1 \setminus V$ 是 a 的鄰域，且與 x 的鄰域 V 不相交．取 E_1 的一個覆蓋 $\mathfrak{U}$．$\mathfrak{U}$ 中必有一含 a 的開集 G，依 a 的鄰域的規定，必存在一個 E 中緊集 A，使 $E_1 \setminus A \subset G$．$\mathfrak{U}$ 是緊集 A 的覆蓋，從而 $\mathfrak{U}$ 中有有窮多個開集 $G_1, \cdots, G_n$，使 $\bigcup_{i=1}^{n} G_i \supset A$．從而 $\{G, G_1, \cdots, G_n\}$ 成爲從 $\mathfrak{U}$ 中選出的 E_1 的覆蓋．

於是得知 E_1 是緊空間。所以 E 確有單點緊化。

現在證明單點緊化(除同胚外)的一意性。試考察 E_1 中點 a 的開鄰域 V。因爲 CV 是緊空間 E_1 中閉集，所以是緊集，且包含於 E 中。因此要作 E 的單點緊化，添加的那點的鄰域必須含一個 E 中緊集在 E_1 中的補集。反之，凡 E 中緊集在 E_1 中的補集必爲 a 的鄰域。事實上，設 A 是 E 中緊集，由於 E_1 是 (T_2) 型空間，故對任一 $X\in A$，$\exists X$ 的一個鄰域 U_x 和 a 的一個領域 V_a^x，使 $U_x\cap V_a^x=\phi$。但由 A 的緊性，$\exists x_1, x_2, \cdots, x_n$，使 $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\supset A$。令

$$U=\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i},$$

$$V=\bigcap_{i=1}^{n} V_a^{x_i},$$

則 V 爲 a 的鄰域且 $U\cap V=\phi$。於是 $E_1\setminus A\supset E_1\setminus U\supset V$。因此，單點緊化的拓撲結構一意確定。證完。

註 1. 由此可知，局部緊 (T_2) 型空間的一個特徵，乃是它是緊 (T_2) 型空間中的開集。

註 2. 在定理 2 中，如果 E 是 (T_i) 型的 $(3\leqslant i\leqslant 4)$，那末 E_1 也是 (T_i) 型的。這是因爲緊空間必是 (T_3) 與 (T_4) 型的。

系. 局部緊 (T_2) 型空間必是全正則的，從而是正則的。

證. 局部緊 (T_2) 型空間必是一個緊 (T_2) 型空間的子空間，而緊空間的子空間必是全正則的。證完。

註. 局部緊 (T_2) 型空間不必是正規的。

例. 考察第二章 §5 開始處的那個例中的空間 $S_1=S\setminus\{(\omega_1, \omega)\}$，這裏 $S=\{(\alpha, \beta)|\alpha\leqslant\omega_1, \beta\leqslant\omega\}$，$\alpha$, β 表示序數，ω 是第一個超窮序數，ω_1 是第一個不可數的超窮序數。這樣 S 是兩個緊 (T_2) 型空間的積空間，從而仍是緊 (T_2) 型空間。由此 S_1 是局部緊 (T_2) 型空間。但在第二章 §5 中已經證明 S_1 不是正規的。

定理 3. 在一局部緊 (T_2) 型空間 E 中，凡開集或閉集必是局部緊

集.

證. 1) 設A是E中閉集. 對於$x \in A$,取x在E中一個具有緊閉包的鄰域V,那末$V \cap A$是x在子空間A中的鄰域,且$\overline{V \cap A} \subset \overline{V} \cap A$,從而$\overline{V \cap A}$是緊集且含於$A$中. 所以$A$是局部緊的.

2) 設A是E中開集. 設$x \in A$,取x在E中的具有緊閉包的鄰域V,使$V \subset \overline{V} \subset A$. 這依定理1與定理2的系是可能的. 於是$V$就是$x$在子空間$A$中的具有緊閉包的鄰域,從而$A$是局部緊的.

定理 4. 爲了積空間$E = \prod_{\iota \in I} E_\iota$是局部緊的,必須且只須諸因子空間中除有窮多個以外都是緊的,而這有窮多個除外的因子空間都是局部緊的.

證. 1) 必要性. 設E是局部緊的. 設$x \in E$, $x = (x_\iota)$. 取x的一個緊鄰域V,依積空間的定義,V在E_ι中的投影除有窮多個以外就是E_ι本身,從而諸因子空間除其中有窮多個以外都是緊的,因爲投影是連續映像. 在這些緊的因子空間以外的諸因子空間E_ι中,V在它裏面的投影是x_ι的鄰域,而這鄰域是緊的(緊集的連續像). x_ι既是E_ι中任意點,從而這空間E_ι是局部緊的.

2) 充分性. 設諸因子空間E_ι中除有窮多個$E_{\iota_1}, \cdots, E_{\iota_n}$是局部緊而非緊的以外,其餘都是緊的. 取$x \in E$,而取$x_{\iota_k}$在$E_{\iota_k}$中的緊鄰域$V_{\iota_k} (1 \leqslant k \leqslant n)$. 令

$$V = V_{\iota_1} \times \cdots \times V_{\iota_n} \times \prod_{\substack{\iota \in I \\ \iota \neq \iota_k}}^{1 \leqslant k \leqslant n} E_\iota,$$

那末V是x在E中的鄰域,並且依§1定理7,V是緊的.

定理 5. 設E是局部緊(T_2)型空間,C是E中緊集,F爲其中閉集且$C \cap F = \phi$,那末必存在一個定義於E上的實值連續函數$f(x)$,使$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$,而

$$x \in C \Longrightarrow f(x) = 0, \quad x \in F \Longrightarrow f(x) = 1.$$

註. 雖然局部緊(T_2)型空間不是正規的,但當那兩個不相交閉集中的一個是緊集時,這兩個集是函數分離的!

證. E 既是 (T_2) 型緊空間，它必是全正則的，從而對於每個點 $y\in C$,必存在E上一個實值連續函數 $f_y(x)$,使在E上 $0\leqslant f_y(x)\leqslant 1$, $f_y(y)=0$, $x\in F\Longrightarrow f_y(x)=1$. $G_y=\left\{x\,|\,x\in E,\ f_y(x)<\dfrac{1}{2}\right\}$ 是 E 中開集,而 $\{G_y\}_{y\in C}$ 組成緊集C的一個覆蓋,從而存在C中有窮多個點 $y_1,\cdots,y_n$, 使 $C\subset\bigcup\limits_{y\in C}G_y$. 令

$$g(x)=\prod_{i=1}^{n}f_{y_i}(x),$$

那末 $g(x)$ 是E上值在0與1之間的連續函數，而且當 $x\in C$ 時, $g(x)<\dfrac{1}{2}$,當 $x\in F$ 時, $g(x)=1$. 令

$$f(x)=\max(2g(x)-1,0),$$

則 $f(x)$ 就是定理中所求的函數.

定理 6. 設 (T_2) 型拓撲空間E環繞x點處是緊的,那末[1]

$$\chi_xE=\psi_xE.$$

證. 因爲 ψ_xE 與 χ_xE 只由x的一個鄰域的性質決定,而與整個空間E無關,無妨設E是緊的 (T_2) 型空間,因爲必要時用x的在E中一個緊鄰域代替E就可以了.

設 $\mathfrak{B}_x$ 是空間E在點x處的一個基,而 $\mathfrak{B}_x^*$ 是含在 $\mathfrak{B}_x$ 中且具有勢 ψ_xE 的僞基(見第一章 § 4 定理 1). 對於每個 $O_\alpha\in\mathfrak{B}_x^*$,取$x$的一個開鄰域 O_α^*,使 $\overline{O_\alpha^*}\subset O_\alpha$ (因爲緊空間必是正則的). 如此決定的 $\{O_\alpha^*\}=\mathfrak{B}'_x$ 是E在x處的僞基,而且

$$\bigcap_\alpha\overline{O_\alpha^*}=\{x\}.$$

令 $\{G_\nu\}_\nu$ 表示凡由有窮多個 O_α^* 的交組成的集族，那末 G_ν 是 x 的開鄰域. $\mathfrak{B}_x''\equiv\{G_\nu\}_\nu$ 的勢等於 ψ_xE. 我們證明 $\mathfrak{B}_x''$ 是E在點x處的基，從而就證明了 $\psi_xE=\chi_xE$(見第一章 § 4 定義 3 下註 1)). 爲了證明這一點,只須證明x的每個鄰域 O_x 必含一個 G_ν. 事實上,考慮集 $F_\alpha\equiv\overline{O_\alpha^*}\setminus O_x$. 因爲

$$\bigcap_\alpha\overline{O_\alpha^*}=\{x\}\subset O_x,$$

1) 符號見第一章.

所以 $\bigcap_{\alpha} F_\alpha=\phi$. 既然$E$是緊空間，必存在有窮多個$F_\alpha$，表示成$F_{\alpha_1},\cdots,F_{\alpha_n}$，使

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}=\phi.$$

令 $G_{\nu_0}=\bigcap_{i=1}^{n} O_{\alpha_i}^*$，那末

$$G_{\nu_0}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\overline{O_{\alpha_i}^*}\subset O_x\cup\bigcap_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}=O_x.$$

證完.

定義 3. 所謂拓撲空間 E 中一個無窮集A按勢收斂於空間中一點 x，是指對於點 x 的任意鄰域 U，

$$A\cap U\text{ 的勢}>A\cap CU\text{ 的勢}.$$

註. 與這個定義等價的，乃是：對於 x 的任意鄰域 U，

$$A\cap CU\text{ 的勢}<A\text{ 的勢},$$

或

$$A\cap U\text{ 的勢}=A\text{ 的勢}.$$

定理 7. 設E是拓撲空間. 如果E中存在無窮集A按勢收斂於E中一點x，那末x必不是孤立點. 如果E是(T_2)型空間，並且E環繞x點是緊的，那末，當x不是孤立點時，E中必有無窮集A按勢收斂於x.

證. 1) 設 A 按勢收斂於 x，那末依定義 3 下的註，對於 x 的任意鄰域，$A\cap U$ 的勢 $=A$ 的勢，而後者是無窮的. 從而x是A的積集點，即x是非孤立點.

2) 設E是(T_2)型空間，而x是E中的非孤立點，並且E環繞x點是緊的. 設U是x的緊鄰域. 在證明中，必要時用U代替E，所以無妨設E本身是緊的. 令

$$\chi_x E=\aleph_\sigma.$$

取E在點x的一個具有勢$\aleph_\sigma$的基(第一章§4)，把這基中的集良序成ω_σ序型的良序集：

$$O_1,O_2,\cdots,O_\alpha,\cdots\quad(1\leqslant\alpha<\omega_\sigma).\tag{1}$$

對於任意$\alpha<\omega_\sigma$，令

$$F_\alpha=\bigcap_{\beta\leqslant\alpha}\overline{O_\beta},$$

那末 $\{F_\alpha\}_{\alpha<\omega_\sigma}$ 是一遞減閉集列，而 $\bigcap\limits_{\alpha<\omega_\sigma} F_\alpha = \{x\}$（因爲 E 是 (T_2) 型空間）；但如 $\alpha<\omega_\sigma$，那末 $F_\alpha \neq \{x\}$，因爲否則由於序數 $\alpha<\omega_\sigma$ 的基數必 $<\aleph_\sigma$，可得 $\psi_x E < \aleph_\sigma = \chi_x E$，與定理 6 矛盾．今令 $\alpha_1 = 1$．設對於凡 $<$ 某一個 $\lambda(<\omega_\sigma)$ 的 μ，α_μ 已規定．如果 $\lambda=\mu+1$，那末令 α_λ 等於使

$$F_{\alpha_\mu} \setminus F_{\alpha_\lambda} \neq \Phi$$

的第一個 α_λ．這樣的 α_λ 必存在，因爲否則

$$F_{\alpha_\mu} = F_{\alpha_{\mu+1}} = \cdots = \bigcap_{\alpha \geqslant \alpha_\mu} F_\alpha = \{x\},$$

與 $F_\alpha \neq \{x\}$（對於一切 α 成立）的事實相背．如果 λ 是極限超越數，並且 $<\omega_\sigma$，那末令 α_λ 等於在一切 $\alpha_\mu(\mu<\lambda)$ 之後的第一個序數，這樣就得出一列序數

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\lambda < \cdots, \tag{2}$$

這序列與一切 $<\omega_\sigma$ 的序數的序列共尾，而且

$$F_{\alpha_\lambda} \setminus F_{\alpha_{\lambda+1}} \neq \Phi.$$

必要時以一個共尾子序列代替(2)，可以說序列(2)的序型是正則始數 ω_τ[1]．

現在對於每個 $\lambda<\omega_\tau$，取點

$$x_\lambda \in F_{\alpha_\lambda} \setminus F_{\alpha_{\lambda+1}}.$$

令 X 表這樣選出的諸 x_λ 的全體，那末 X 的勢等於 $\aleph_\tau$．我們證明 X 按勢收斂於 x．令 U 表示 x 的任意鄰域．既然假定 E 是緊的，從而是正則的，x 必有一鄰域 O_γ，使 O_γ 屬於序列(1)，並且 $\overline{O_\gamma} \subset U$．這樣 U 也包含 F_{α_γ}，而 α_γ 是(2)中第一個超過 γ 的序數．所以，對於凡 $\lambda \geqslant \gamma$，$U \supset F_{\alpha_\lambda} \ni x_\lambda$．因此

$X \cap U$ 的勢等於 $\aleph_\tau$，

而

$X \setminus U$ 的勢 $<\aleph_\tau$．

證完．

§4. 列緊空間與局部列緊空間

定義 1. 拓樸空間 E 中的一點 x 叫做 E 中點集 A 的密集點，是指對於 x 的任意鄰域 V，$V \cap A$ 是無窮集．

註．1) 顯然密集點必是積集點．如果 E 是 (T_1) 型空間，那末密

1) 見 П. С. Александров，集與函數的汎論初階．

集點與積集點是相同的概念. 事實上,設 E 是 (T_1) 型空間,而 x 是 E 中點集 A 的積集點,取 x 的任意鄰域 U,那末 U 含 A 中一點 $y_1 \neq x$. E 既是 (T_1) 型的,存在 x 的一個鄰域 $V_1 \not\ni y_1$, 而 $U \cap V_1$ 既是 x 的鄰域,所以 $U \cap V_1$ 含 A 中點 $y_2 \neq x$. 這個 y_2 顯然不等於 y_1. 依此類推,可以證明 U 中含無窮多個屬於 A 的點.

2) 在一般的(非 (T_1) 型的)空間中,積集點與密集點兩個概念不相同. 設 x, y 是空間中兩點,而設 x 的任意鄰域都含 y, 那末如令 $A = \{y\}$ 時, x 是 A 的積集點,而不是 A 的密集點.

定義 2. 拓撲空間 E 叫做列緊的[1], 是指其中任意無窮點集必有一密集點.

註. 1) 因為凡無窮集必含一可數無窮集, 在定義 2 中如把"無窮點集"換成"可數無窮集", 對定義並無改變.

2) 比較 §1 定理 13,可知緊空間必是列緊的. 但這命題之逆不成立.

例. 設 E 表第一類與第二類序數所組成的集. 如 $a \in E$,定義 a 的鄰域為凡形如 $]b, a]$ $(b < a,\ b \in E)$ 的區間. 不難看出,賦以如此的拓撲結構, E 成為一個 (T_2) 型拓撲空間. 取 E 中任意一個可數點集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. 令 x_{n_1} 為其中最小的數——這樣的數存在,因為 E 是良序的. 令 x_{n_2} 是 $\{x_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 中大於 x_{n_1} 的數中最小者, x_{n_2} 存在,也是由於 E 是良序集. 如此類推. 如果這個步驟經有窮多次終止,即得出 x_{n_k} 為 $\{x_n\}$ 中的最大元, $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k}$, 而其餘諸 x_n 只能是 x_{n_i} 中的某一個 $(1 \leqslant i \leqslant k)$,於是 $\{x_n\}$ 成為有窮集. 如果 $\{x_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 是無窮集, 上述步驟必然無限地繼續下去, $x_{n_1} < x_{n_2} < \cdots < x_{n_k} < \cdots$. 設 α 是 E 中大於一切 x_{n_k} 的最小數——這樣的數存在,因為 E 是由第一類與第二類序數全體組成. 這樣, α 是 $\{x_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 的密集點,因為否則 α 的一個鄰域 $]\beta, \alpha]$ $(\beta \in E,\ \beta < \alpha)$ 只含集 $\{x_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 中的有窮多個點,而如果 x_p 是這有窮多個點中的最大者,那末 $x_p + 1$ 便成為大於一切 x_{n_k} 的最小數, 而

1) 這一概念是屬於 M. Fréchet 的.

上述作 x_{n_i} 的程序不能無限了. 得出矛盾. 我們證明了 E 中任意可數無窮集有密集點,從而 E 是列緊空間. 但 E 不是緊空間. 事實上,如果 $a \in E$ 不是極限數,令 $G_a =]a-1, a]$,而如果 a 是極限數,令 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, $\lim a_n = a$,則取某個 a_n,而令 $G_a =]a_n, a]$. 這樣 $\{G_a | a \in E\}$ 是 E 的一個不可數覆蓋,而從這覆蓋中選不出有窮覆蓋來.

定理 1. 爲了拓撲空間 E 是列緊的, 必須且只須下列條件中的任何一個成立:

1°. E 中任意一族可數多個遞次相含的不空閉集

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supsetneq \cdots \quad (n \text{ 遍表自然數全體})$$

必有不空的交;

2°. 由 E 的任一可數覆蓋可取出一個 E 的有窮覆蓋來.

證. 我們證明定義 1 中的條件 $\Longrightarrow 1° \Longrightarrow 2° \Longrightarrow$ 定義 1 中的條件.

1) 設 E 是列緊空間;設 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ 是一族遞次相含的不空閉集. 如從某一 n 起,

$$F_n = F_{n+1} = \cdots,$$

那末 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = F_n \neq \phi$. 證明完結. 否則把重複的 F_n 略去,可設對於每個 n,

$$F_n \supsetneq F_{n+1},$$

從而可以取一點

$$x_n \in F_n \setminus F_{n+1}.$$

$\{x_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 是 E 中無窮集,因爲由上述取法,諸 x_n 是互不相同的. 既然 E 是列緊空間,這一無窮集必在 E 中有一密集點,表示成 x_0. 這樣,x_0 的任意鄰域必然包含無窮多個 x_n,即與每個 F_n 相交,從而對於每個自然數 n,

$$x_0 \in \overline{F}_n = F_n,$$

而

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

證明完結．

2）設拓撲空間E滿足條件1°；設$\{G_n\}$是E的一個可數覆蓋．令

$$F_n = C\bigcup_{k=1}^{n} G_k,$$

那末F_n是閉集，並且

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots.$$

如果每個F_n不空，那末依假定，存在一點

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n,$$

即

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C\bigcup_{k=1}^{n} G_k = C\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k,$$

與$\{G_k|k=1, 2, \cdots\}$是E的覆蓋這一假定矛盾．因此必存在一個自然數n，使

$$F_n = \phi,$$

即

$$\bigcup_{k=1}^{n} G_k = E.$$

證完．

3）設拓撲空間E滿足條件2°；設A是E中一個無窮集． 假定A在E中沒有密集點，那末對於E中每個點x，必存在x的一個開鄰域U_x，使$U_x \cap A$只含有窮多個點． 今依定義2下註1，無妨設A是可數無窮集$\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$．今命

$$G_n = U\{U_x | U_x \cap A \not\ni a_n, a_{n+1}, \cdots\},$$

對於E中任意一點x，必存在自然數n，使$U_x \cap A$不含$a_n, a_{n+1}, \cdots$，從而$U_x \subset G_n$．因此$\{G_n|n=1, 2, \cdots\}$是E的可數覆蓋．依假定，可以由$\{G_n\}$中取出有窮覆蓋來：

$$\bigcup_{i=1}^{m} G_{k_i} = E. \tag{1}$$

設 $k > k_i\ (1 \leqslant i \leqslant m)$,那末

$$a_k \notin G_{k_i} \cap A \quad (i = 1, \cdots, m),$$

與(1)及 $a_k \in A$ 衝突. 所以 A 在 E 中必有密集點,即 E 是列緊空間.

定理 2. 凡權數不超過可數的(即滿足第二可數性公理的)列緊空間必是緊空間.

註. 因此,對於滿足第二可數性公理的拓撲空間來說,緊性與列緊性是相同的概念.

證. 設 $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ 是 E 的覆蓋;設 $\{U_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 是 E 的可數基,於是對於每個 $\iota \in I$ 及每個點 $x \in G_\iota$,必存在一個 $n = n(\iota, x)$,使

$$x \in U_{n(\iota, x)} \subset G_\iota.$$

這樣

$$\bigcup_{\iota \in I,\ x \in E} U_{n(\iota, x)} = E.$$

但 $\{U_{n(\iota, x)}\}\ (\iota \in I,\ x \in E)$ 既是 $\{U_n | n = 1, 2, \cdots\}$ 的子族,其中至多含可數多個不同的,我們用

$$U_{n_1}, U_{n_2}, \cdots, U_{n_k}, \cdots$$

表示它們. 在上述的關於 $U_{n(\iota, x)}$ 的作法中,令 G_{n_i} 是與 U_{n_i} 相應的那個屬於 $\{G_\iota\}_{\iota \in I}$ 的集,於是 $\{G_{n_i} | i = 1, 2, \cdots\}$ 是 E 的可數覆蓋. 依空間的列緊性,從它可取出一個 E 的有窮覆蓋來. 於是 E 的緊性證明了.

定義 3. 拓撲空間 E 中的集 A 叫做列緊的,是指當把 A 看做是 E 的子空間時,A 是列緊空間.

定義 4. 拓撲空間 E 叫做是環繞點 $x(\in E)$ 列緊的,是指這點在 E 中有一列緊的閉鄰域. 拓撲空間 E 叫做局部列緊的,是指 E 環繞它的每個點是列緊的.

定義 5. 所謂拓撲空間 E 的單點列緊化,是指一個含 E 的列緊 (T_2) 型空間 E_1,而 E_1 只比 E 多含一個點: $E_1 = E \cup \{\alpha\}$.

定理 3. 列緊空間中的閉集必是列緊的.

證. 設 A 是列緊空間 E 中的閉集. 取 A 的一個無窮子集 Z, Z 既是列緊空間 E 中的無窮點集,它在 E 中必有一密集點 a_0. a_0 既是閉集 A 的密集點,從而也是它的積集點,所以 $a_0 \in A$. 所以 Z 在 A 中有密集點,因為 a_0 在 A 中的鄰域必作

如下的形狀：$V\cap A$，其中 V 是 a_0 在 E 中的鄰域．於是 A 的列緊性證完．

定理 4．在一拓撲空間中，有窮多個列緊集的併集必是列緊的．

證．事實上，設 A，B 是列緊集，而 Z 是 $A\cup B$ 中的無窮集，那末兩集 $Z\cap A$，$Z\cap B$ 之中至少有一個是無窮集．今假定 $Z\cap A$ 是無窮集，那末依 A 的列緊性，$Z\cap A$ 在 A 中有一密集點．這樣，這點也必是 Z 在 $A\cup B$ 中的密集點，因此 $A\cup B$ 是列緊的．以上兩種情形，用數學歸納法不難證明．

定理 5（Александров, П. С.）[1]．設 E 是一個 (T_2) 型拓撲空間．爲了存在 E 的單點列緊化，必須且只須 E 是局部列緊空間．

證．1）必要性．由定義 4 與定理 3 容易推出．

2）充分性．設 E 是局部列緊的．添入 E 一點 ξ，$E_1=E\cup\{\xi\}$．規定 $x\in E$ 在 E_1 中的鄰域與在 E 中的相同，而 ξ 的鄰域爲凡包含作如下形狀的集者：

$$O_\xi=\{\xi\}\cup(E\setminus F),$$

F 表示 E 中任意一個列緊閉集．V_1—V_2 不待證．V_3 由定理 4 直接推出，V_4 可由 $E\setminus F$ 是開集這一事實看出．由定義 4 及 ξ 的鄰域的規定，可知 E_1 是 (T_2) 型空間．現在證明，賦以如上的拓撲結構，$E\cup\{\xi\}$ 是列緊的．設 A 是 E 中一個無窮集．如果存在一個閉列緊集 $F\subset E$，使 $A\cap F$ 是無窮集，那末 A 在 F 中，從而在空間 E_1 中有一密集點．如對於 E 中任意閉列緊集 F，$F\cap A$ 是有窮集，那末對於 ξ 的任意鄰域 O_ξ，$A\cap O_\xi$ 是無窮的，從而 ξ 是 A 在 E_1 中的密集點．證完．

註．與 §3 的定理 2 相反，在定理 5 中，如果 E 是局部列緊的，那末 E 的一點列緊化並不能一意決定．取 E_1 爲由凡 $<\omega_1$ 的序數所組成的集．$\alpha(\in E_1)$ 的鄰域規定爲 E_1 中凡含 α 的，開區間 $]x,y[$ $(x<\alpha<y,\ x,\ y\in E_1)$，於是 E_1 是一 (T_2) 型拓撲空間．從 E_1 中取出 ω_0，而令所餘的拓撲空間是 E，那末 E 是局部緊的（參看定義 2 下的例）．因此可以對於 E 添加一點 ξ 而成爲一個緊 (T_2) 型空間 $E_0=E\cup\{\xi\}$．依 §3 定理 2，不難證明 ξ 的一個基本鄰域組由下列諸集組成：

$$O_{k,\alpha}=\{\xi\}\cup\bigcup_{n=k+1}^{\infty}\{n\}\cup\bigcup_{\beta=\alpha+1}^{\omega_1}\{\beta\}.$$

但也可以對於 E 添加一點 $\xi=\omega_0$ 而成 E_1，E_1 是列緊的，而非緊的．這時 ξ 的基本鄰域組是由下列集組成：

$$O_k=\{\xi\}\cup\bigcup_{n=k+1}^{\infty}\{n\}.$$

1) П. С. Александров, Über die Metrisation der im Kleinen Kompakten topologischen Räume, Math. Ann., 92 (1924), 294—301.

定理 6. 凡滿足第一可數性公理的列緊 (T_2) 型空間 E 必是正則的.

證. 設 $\{O_n\}$ 是點 $x(\in E)$ 的一個基本鄰域組 $(n=1,2,\cdots)$. 無妨設序列 $\{O_n\}_n$ 是遞減的,因爲必要時可以用 $\bigcap_{k=1}^{n} O_k$ 代替 O_n. 如果空間 E 在點 x 處不是正則的,那末必存在一鄰域 O_n,使 O_n 不含點 x 的任何閉鄰域,換句話說,凡閉集

$$F_k=\bar{O}_{n+k}\setminus O_n \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

是不空的. $\{F_k\}_k$ 形成一串遞減的閉集,由於空間的列緊性,

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\neq\phi,$$

即必存在一點 $y\in\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$,這一點 y 必與 x 不同. 既然 $F_k\subset\bar{O}_{n+k}$,所以

$$y\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bar{O}_k. \tag{2}$$

由於空間是 (T_2) 型的,對於每個點 $z\neq x$, z 必有一鄰域 O_z 與一個 O_n 不相交,從而 $z\notin\bar{O}_n$. 因此

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}\bar{O}_k=\{x\},$$

與(2)矛盾,因爲 $y\neq x$. 空間的正則性得證.

定理 7. 正則列緊空間中每個完集的勢必不小於連續統的勢.

證. 既然列緊正則空間中的完集本身也是列緊正則空間,我們只須證明:凡不含孤立點的列緊正則空間的勢必然 $\geqslant \mathfrak{c}(=2^{\aleph_0})$.

設 E 是不含孤立點的列緊正則空間. E 中任意開集必也不含孤立點,並且凡開集的閉包也不含孤立點. 事實上,如 x 是開集 G 的閉包 $\bar{G}$ 的孤立點,那末 x 必有一鄰域 V,使 $V\cap\bar{G}=\{x\}$. 如果 $V\cap G=\phi$,那末 $x\notin\bar{G}$,這不可能,從而 $V\cap G=\{x\}$. 既然 G 是開集, x 是空間 E 的孤立點,與假定矛盾!

設 x_0 與 x_1 是空間 E 的兩不相同點，而 U_0 與 U_1 各是它們的開鄰域，滿足 $\overline{U}_0 \cap \overline{U}_1 = \phi$. 這樣的鄰域存在，乃是由於空間的正則性. 事實上，x_0 與 x_1 有不相交的開鄰域，從而存在 x_0 的開鄰域 U_0，使 $\overline{U}_0 \not\ni x_1$，但這樣 $C\overline{U}_0$ 就是 x_1 的鄰域、依空間的正則性，存在 x_1 的開鄰域 U_1，使 $\overline{U}_1 \subset C\overline{U}_0$. 在 $U_i (i = 0, 1)$ 中再取兩不同點 x_{i_0}, x_{i_1}，並取它們的不相交開鄰域 $\overline{U}_{i_0}$ 與 $\overline{U}_{i_1} (i = 0, 1)$. 繼續這樣的步驟，那末對於只取 0 與 1 兩值的指標 $i_0, \cdots, i_n$，可得一開集的閉包 $\overline{U}_{i_0 \cdots i_n}$，使

$$\overline{U}_{i_0 \cdots i_n} \supset \overline{U}_{i_0 \cdots i_n i_{n+1}}, \quad \overline{U}_{i_0 i_1 \cdots i_n 0} \cap \overline{U}_{i_0 i_1 \cdots i_n 1} = \phi.$$

E 既是列緊的，凡形式如下的閉集列必有不空的交：

$$\overline{U}_{i_1} \supset \overline{U}_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \overline{U}_{i_1 \cdots i_n} \supset \cdots.$$

取 $x_{i_1 \cdots i_n \cdots} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{i_1 \cdots i_n}$，那末對於不同的指標列 $\{i_1, i_2, \cdots, i_n, \cdots\}$ 所得的點 $x_{i_1 \cdots i_n \cdots}$ 必不相同. 這些點所組成的集的勢 $= \mathfrak{c}$. 證完.

系. 凡不含孤立點的緊 (T_2) 型空間的勢 $\geqslant \mathfrak{c}$.

證. 事實上，緊 (T_2) 型空間必是正則列緊空間.

§5. 仿 緊 空 間

定義 1. 拓撲空間 E 的覆蓋 $\mathfrak{U}$ 叫作按點有窮的，是指空間 E 中每點只含在 $\mathfrak{U}$ 中有窮多個集裏. 覆蓋 $\mathfrak{U}$ 叫做局部有窮的，是指空間每點必有一鄰域 U，使 U 只與 $\mathfrak{U}$ 中有窮多個集相交.

定義 2. 拓撲空間 E 的覆蓋 $\mathfrak{U}_1$ 叫作從屬於另一覆蓋 $\mathfrak{U}_2$，是指 $\mathfrak{U}_1$ 中的每個集必含在 $\mathfrak{U}_2$ 的一個集中.

註. 如果 $\mathfrak{U}_1$ 的集是從 $\mathfrak{U}_2$ 中取出者，那末 $\mathfrak{U}_1$ 必從屬於 $\mathfrak{U}_2$. 反之，逆命題不必成立.

例. 設 $E = R$ (數直綫)，$\mathfrak{U}_2$ 表示一切以無理數點爲端點的區間所組成的覆蓋，而 $\mathfrak{U}_1$ 表示凡以有理數點爲中心以有理數爲長的區間所組成的覆蓋，那末 $\mathfrak{U}_1$ 從屬於 $\mathfrak{U}_2$，但 $\mathfrak{U}_1$ 不是由 $\mathfrak{U}_2$ 取出的一些集組成者.

定義 3 (Dieudonné)[1]. 拓撲空間叫做仿緊 (paracompact) 的，

1) 本節重要結果都是屬於 J. Dieudonné 的.

是指對於它的每一覆蓋 $\mathfrak{U}_1$，必可找到它的一個局部有窮覆蓋 $\mathfrak{U}_2$，使 $\mathfrak{U}_2$ 從屬於 $\mathfrak{U}_1$. 拓樸空間 E 中的點集 A 叫做仿緊的，乃是指當 A 看做是 E 的子空間時，A 是仿緊空間.

註. 既然有窮覆蓋必是局部有窮覆蓋，引用定義 2 下的註容易看出，緊空間必是仿緊空間.

定理 1. 仿緊 (T_2) 型空間必是正規的.

證. 證明分兩步. 設 E 是仿緊 (T_2) 型空間.

1) 首先證 E 是正則的. 設 $a(\in E)$ 不含在 E 的閉集 F 中. 對於每個 $x\in F$，必有 x 的鄰域 V_x 與 a 的鄰域 W_x，使 $V_x\cap W_x=\phi$. $\mathfrak{U}=\{V_x|x\in F\}\cup\{CF\}$ 組成 E 的覆蓋，依假定必存在一局部有窮覆蓋 $\mathfrak{U}'$ 從屬於 $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}'$ 中凡與 F 相交的開集的併乃是含 F 的開集，今用 G 表示它. $\mathfrak{U}'$ 既是局部有窮覆蓋，a 必有一個鄰域 U，使 U 只與 $\mathfrak{U}'$ 中有窮多個與 F 相交的集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相交. $\mathfrak{U}'$ 既是從屬於 $\mathfrak{U}$ 的，對於每個 $i(1\leqslant i\leqslant n)$，存在 $V_{x_i}\in\mathfrak{U}$，$(x_i\in F)$，使 $A_i\subset V_{x_i}$. 令 $U_0=U\cap\bigcap\limits_{i=1}^{n}W_{x_i}$，那末 U_0 是 a 的鄰域，而 $U_0\cap G=\phi$. 從而 E 的正則性證明了.

2) 現在證明 E 是正規的. 設 F 與 H 為 E 中兩個不相交的閉集. 依 1) 中所證，E 是正則的，對於 F 中每一點 x，x 必有一鄰域 V_x 與一個含 H 的開集 W_x，使 $V_x\cap W_x=\phi$. 設 $\mathfrak{U}=\{V_x\}_{x\in F}\cup\{CF\}$，那末 $\mathfrak{U}$ 是 E 的覆蓋. 依假定，存在一個局部有窮覆蓋 $\mathfrak{U}'$，$\mathfrak{U}'$ 從屬於 $\mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}'$ 中與 F 相交的開集的併集是含 F 的開集，用 G_1 表示它. 剩下的乃是要證明存在一個含 H 而與 G_1 不相交的開集 G_2. 對於 H 中每點 y，y 必有一開鄰域 U_y，使 U_y 只與 $\mathfrak{U}'$ 中有窮多個與 F 相交的集 $A_1, \cdots, A_n$ 相交. 依 $\mathfrak{U}'$ 的定義，對於每個 $i\,(1\leqslant i\leqslant n)$，存在一個 $V_{x_i}\in\mathfrak{U}$，使 $A_i\subset V_{x_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 令 $S_y=\bigcap\limits_{i=1}^{n}W_{x_i}\cap U_y$，那末 S_y 是 y 的開鄰域，而 $S_y\cap G_1=\phi$. 令 $G_2=\bigcup\limits_{y\in H}S_y$. 證完.

註．正規空間不一定是仿緊空間[1]．

定理 2. 仿緊空間中的閉集必是仿緊的．

證．設E是仿緊空間，而F是E中的閉集；設$\mathfrak{U}$是F的一個覆蓋．$\mathfrak{U}$中每個集G是F中的開集，從而是E中一個開集G_1與F的交：$G = G_1 \cap F$．取定這些G_1，令$\mathfrak{U}_1 = \{G_1\}_{G \in \mathfrak{U}} \cup \{CF\}$，則$\mathfrak{U}_1$是$E$的覆蓋，依空間$E$的仿緊性，存在$E$的一個局部有窮覆蓋$\mathfrak{U}_1'$，$\mathfrak{U}_1'$從屬於$\mathfrak{U}_1$．設$\mathfrak{U}_1'$中一集$H_1$與$F$相交，那末這個$H_1$必含在一個$G_1$裏，從而$H_1 \cap F \equiv H$必含在一個$G$裏．因此，這類集$H$組成$F$的覆蓋$\mathfrak{U}'$，$\mathfrak{U}'$從屬於覆蓋$\mathfrak{U}$．$\mathfrak{U}'$的局部有窮性由$\mathfrak{U}_1'$的局部有窮性直接得出．

定理 3. 設$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$是正規空間$E$的一個按點有窮的覆蓋．$E$必有一覆蓋$(B_\alpha)_{\alpha \in I}$．(其標號族與原來那一個覆蓋的標號族相同！)，使對於每個$\alpha \in I$，$\overline{B}_\alpha \subset A_\alpha$．

註．這定理可以看作是第二章§4定理4的推廣．

證．考察凡以I爲標號族並滿足下列條件的覆蓋$\mathfrak{U} = \{X_\alpha\}$的全體$\Phi$：存在$I$的一個子族$H_\mathfrak{U}$(隨$\mathfrak{U}$而不同)，使

$$\alpha \in H_\mathfrak{U} \Longrightarrow \overline{X}_\alpha \subset A_\alpha,$$
$$\alpha \notin H_\mathfrak{U} \Longrightarrow X_\alpha = A_\alpha \neq \overline{A}_\alpha.$$

這個Φ不是空的，因爲只須取$\mathfrak{U} = \{A_\alpha\}$，而令$H_\mathfrak{U}$表示凡使$A_\alpha$是既開且閉的集的那些標號$\alpha$的全體．我們在$\Phi$中引入序次如下：$\mathfrak{U} = \{X_\alpha\} \prec \mathfrak{U}' = \{Y_\alpha\}$，是指$H_\mathfrak{U} \subset H_{\mathfrak{U}'}$，而$\alpha \in H_\mathfrak{U} \Longrightarrow X_\alpha = Y_\alpha$．這樣不難看出$\Phi$是一個半序集．取$\Phi$的一個全序子集$\Psi$．令$K = \bigcup_{\mathfrak{U} \in \Phi} H_\mathfrak{U}$．對於$\alpha \in K$，取一$\mathfrak{U}$，使$\alpha \in H_\mathfrak{U}$，並令$Z_\alpha$表$\mathfrak{U}$中帶有標號$\alpha$的那個集(依上所述，這集與$\mathfrak{U}$的選擇無關)，而如$\alpha \notin K$，那末令$Z_\alpha = A_\alpha$．今證$\mathfrak{Z} = \{Z_\alpha\}$是$E$的覆蓋．事實上，如$x \in E$，那末依假定，$x$只含在有窮多個$A_\alpha$中，我們把這些表示成$A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_n}$．如有一個$\alpha_i$不屬於$K$，

1) 見 J. Dieudonné 的文章[3]．這裏例從略．可以證明具有可數基的正規空間是仿緊的，但存在可分正規非仿緊空間．參看 M. E. Ruder, A separable normal non-paracompact space, Bull. Amer. Math. Soc., 61 (1955), 573, Abst. 855.

那末 $x \in A_{\alpha_i} = Z_{\alpha_i}$。如果一切 α_i 屬於 K，那末由於 Ψ 是全序的，它們必含在同一個 $H_{\mathfrak{U}}$ 中。這個 $\mathfrak{U} = \{X_\alpha\}$ 既是 E 的覆蓋，x 必含在一個 X_α 中。但含 x 的 A_α 只能是 $A_{\alpha_1}, \cdots, A_{\alpha_n}$ 中的一個。因爲 $\alpha_i \in H_{\mathfrak{U}}$，所以 $\overline{X}_{\alpha_i} \subset A_{\alpha_i}$，因此，假定 $x \in X_{\alpha_i}$。α_i 既 $\in H_{\mathfrak{U}}$，依上述 $Z_{\alpha_i} = X_{\alpha_i}$。從而無論如何，$x$ 屬於 $\mathfrak{U}$ 中一個集，即 $\mathfrak{U}$ 是 E 的覆蓋。依 Z_α 的定義可知 $\mathfrak{z} \succ$ 每個屬於 Ψ 的覆蓋。這樣證明了下列事實：Φ 中每個全序子集必在 Φ 中有一個上界。依 Zorn 輔助定理，Φ 必含一極大元 $\mathfrak{M} = (M_\alpha)$。我們證明 $H_{\mathfrak{M}} = I$，從而定理就證完了。實際上，假定 $H_{\mathfrak{M}} \neq I$，令 $\alpha \notin H_{\mathfrak{M}}$，那末 $M_\alpha = A_\alpha$。令

$$G = \bigcup_{\substack{\beta \neq \alpha \\ \beta \in I}} M_\beta,$$

那末 G 是開集，並包含閉集 CM_α。由於空間是正規的，存在開集 V，使

$$CM_\alpha \subset V \subset \overline{V} \subset G.$$

令 $M'_\alpha = C\overline{V}$，那末 M'_α 是開集，且 $\subset A_\alpha$。

$$\{M_\beta\}_{\beta \in I, \beta \neq \alpha} \cup \{M'_\alpha\}$$

是 E 的覆蓋 $\mathfrak{z}'$（因爲 $M'_\alpha \supset CG$）。這個覆蓋 $\mathfrak{z}' \in \Phi$，而

$$H_{\mathfrak{z}'} \supset H_{\mathfrak{M}} \cup \{\alpha\} \supsetneq H_{\mathfrak{M}},$$

因爲 $M_\alpha \supset CV \supset C\overline{V}$，$CV$ 是閉集，所以 $M_\alpha \supset \overline{CV} \supset \overline{C\overline{V}} = \overline{M}'_\alpha$，即 $\overline{M}'_\alpha \subset A_\alpha$，從而 $\alpha \in H_{\mathfrak{z}'}$。這與 $\mathfrak{M}$ 是極大的假定相背。定理證完。

定義 4. 定義在拓樸空間 E 上的實值函數 f 叫做在點 $x_0 \in E$ 處上（下）半連續，是指對於每個實數 $\alpha > f(x_0)$（$\alpha < f(x_0)$），必存在 x_0 的鄰域 V，使

$$y \in V \Longrightarrow f(y) < \alpha \quad (f(y) > \alpha).$$

E 上的實値函數叫作上（下）半連續，是指它在 E 的每個點是上（下）半連續的。

定理 4. 設在仿緊（T_2）型空間 E 上有一上半連續函數 h 及一下半連續函數 g，滿足

$$g(x) > h(x) \quad (一切\ x \in E),$$

那末必存在 E 上一個連續函數 $f(x)$，使對於每個 $x \in E$，

$$h(x) < f(x) < g(x).$$

證. 對於每一點 $x \in E$, 既然 $h(x) < g(x)$, 可以取一實數 λ_x, 使 $h(x) < \lambda_x < g(x)$. h 既是上半連續,而 g 是下半連續,必存在 x 的一個開鄰域 V_x,使

$$y \in V_x \Longrightarrow h(y) < \lambda_x < g(y).$$

$\mathfrak{U} = \{V_x\}_{x \in E}$ 是 E 的覆蓋. 由於空間的仿緊性, 可以取一局部有窮覆蓋 $\mathfrak{U}' = (A_\alpha)_{\alpha \in I}$, 使 $\mathfrak{U}'$ 從屬於 $\mathfrak{U}$. 依定理 1 與定理 3,可取一覆蓋 $\mathfrak{U}_1 = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$,使 $\mathfrak{U}_1$ 具有相同之標號族 I,且 $\alpha \in I \Longrightarrow \overline{B}_\alpha \subset A_\alpha$. 對於每個標號 α,必存在一個定義在E上的連續函數 f_α、使

$$x \notin A_\alpha \Longrightarrow f_\alpha(x) = -\infty, \quad x \in B_\alpha \Longrightarrow f(x) = \lambda_{x_\alpha},$$

而對於一般的 $x \in E$,

$$-\infty \leqslant f(x) \leqslant \lambda_{x_\alpha}.$$

這裏的 x_α 表示一點,使 $U_{x_\alpha} \supset A_\alpha$,所以

$$x \in A_\alpha \Longrightarrow f_\alpha(x) < g(x), \text{ 而 } x \in B_\alpha \Longrightarrow h(x) < f_\alpha(x).$$

令

$$f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x),$$

那末 $f(x)$ 是E上的連續函數. 事實上,對於每點 $x \in E$, x 有一鄰域U只與有窮多個 A_α 相交,而在U中 $f(x)$ 是有窮多個連續函數的上確界,從而在U中是連續函數. 另一方面, 存在一個 $B_\alpha \ni x$,從而 $f(x) \geqslant \geqslant f_\alpha(x) > h(x)$, 而存在一個 β, 使 $f_\beta(x) = f(x)$, 於是 $f_\beta(x) > > h(x) \geqslant -\infty$. 所以 $x \in A_\beta$,從而

$$f(x) = f_\beta(x) < g(x).$$

證明完.

系. 在定理 4 中,如 $<$ 號換成 $\leqslant$ 號,一切結果仍成立.

證. 無妨設 $-1 \leqslant h(x) \leqslant g(x) \leqslant 1$,因為否則我們只須各用

$$\frac{h}{1+|h|}, \quad \frac{g}{1+|g|}$$

代替 g 與 h. 我們依定理 4 定義三個函數列 $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, $\{f_n\}$ 如下:

(i) $g_0(x) = g(x) + 1$, $h_0(x) = h(x)$;

(ii) $f_n(x)$ 是連續函數,滿足下列條件:

$$x \in E \Longrightarrow h_n(x) < f_n(x) < g_n(x);$$

(iii) $g_n(x) = \min\left(g(x) + \frac{1}{2^n}, f_{n-1}(x)\right)$,

$$h_n(x) = \max\left(h(x), f_{n-1}(x) - \frac{1}{2^n}\right).$$

不難看出,依上面的遞歸公式, $g_n(x)$ 都是下半連續的, $h_n(x)$ 都是上半連續的,並且對於每個 $x \in E$,對於任意 $n(=1, 2, \cdots)$,

$$h_n(x) < g_n(x).$$

因此,上述的遞歸公式可以無限制地延續下去. 不難看出, 對於每個 $x \in E$ 及任意 $n = 1, 2, \cdots$,

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

從而函數列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收斂於一個連續函數 $f(x)$. 這個 $f(x)$ 顯然滿足下列條件:對於任意 $x \in E$,

$$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x).$$

證完.

參 考 文 獻

近年來,仿緊性方面的文獻很多,不一一備舉,只略舉幾篇:

[1] 楊忠道, On paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1951), 185—189.

[2] Michael, E., A note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), 831 (仿緊空間的子空間仍是仿緊的).

——, Another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 822—828.

[3] Dieudonne, J., Une généralization des espaces compacts, J. Math. Pures Appl. 23 (1944) 65—76.

§6. 緊 化 問 題

定義 1. 所謂拓撲空間 E 的緊 (T_2) 型擴張(簡稱緊化), 是指一含 E 作爲其子空間的緊 (T_2) 型空間 B,使 E 在 B 中是稠的.

註. 1) 依§1定理9, 爲了拓撲空間E有緊(T_2)型擴張的可能,必須E是全正則的. 這條件事實上也是充分的. 依第二章§3定理1與本章§1定理6,全正則空間E必是一個緊(T_2)型空間S的子空間. 取$\overline{E}$爲E在S中的閉包,那末$\overline{E}$就是E的緊化(§1定理3).

2) §1定理8並不意味着任意拓撲空間都有緊化, 因爲雖然那裏證明了凡拓撲空間可以看成是一個緊空間S中的稠集, 但S一般不是(T_2)型的(甚至假定E是(T_2)型的也不能保證這一點!).

3) 一般設E是任意拓撲空間,而$C(E)$表示E上一切有界連續函數組成的集,而對於每個$f_\alpha \in C(E)(\alpha \in A)$, 令$R_\alpha$表示數直綫$R$中含$f_\alpha(E)$的最小閉區間,那末$R_\alpha$是緊$(T_2)$型空間,而$x \to (f_\alpha(x))_\alpha$是由$E$到$\prod_\alpha R_\alpha$中的連續映像(第一章§2定理7). 爲了$x \to (f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$是一對一的映像,必須且只須$C(E)$是一個分離函數族,即對於$E$中任意兩個不同點$x_1$與$x_2$,必存在$f_\alpha \in C(E)$,使$f_\alpha(x_1) \neq f_\alpha(x_2)$, 換句話說,必須且只須$E$中任意兩點是函數分離的. 爲了$x \to (f_\alpha(x))_\alpha$是由$E$到$\prod_\alpha R_\alpha$中的同胚映像, 必須且只須$E$是全正則的. 本節中映像$x \to (f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$恆表示成$f$, 而$f(E) = f_A(E)$表示$E$在依$f$在$\prod_\alpha R_\alpha$中的映像. 如果$B$是$A$的子集,那末

$$x \to (f_\beta(x))_{\beta\in B}$$

表示成f_B. 依上述,f_B是連續映像.

定理1. 設φ是由拓撲空間E到一全正則空間Y上的連續映像,那末必存在一個由$f(E)$到Y上的連續映像ψ,使$\varphi = \psi \circ f$. 如Z是Y的任意一個緊(T_2)型擴張,那末ψ可以擴張成由$\overline{f(E)}$到Z上的連續映像.

證. 依定義1下的註1),無妨設Y是一個緊(T_2)型空間Z中的稠集. 於是對於每個$g \in C(Z)$(即Z上一切連續有界函數的集), $g \circ \varphi$決定E上一個連續有界函數$f_\alpha \in C(E)$, $\alpha \in A$. 把這個標號α附於g上,表示成g_α. A中凡這類標號(即可依上述方式附於一個$g \in C(Z)$上的標號)的子集表示成B. 如$\varphi(x) = y$,那末可以寫成$f_B(x) = \{g_\alpha(y)\}_{\alpha\in B}$.

於是把 $z\in Z$ 映成 $\{g_\alpha(z)\}_{\alpha\in B}$ 的映像 ψ_B 滿足等式 $f_B=\psi_B\circ\varphi$. 但 Z 既然是全正則的,依定義1下註3,可知 ψ_B 是同胚映像. 令 P_B^A 表示由 $\prod\limits_{\alpha\in A}R_\alpha$ 到 $\prod\limits_{\beta\in B}R_\beta$ 上的投影變換; 令 $\psi=\overset{-1}{\psi_B}\circ P_B^A$, 那末 ψ 是由 $\prod\limits_{\alpha\in A}R_\alpha$ 的一個子空間到 Z 上的連續映像,而且 $\varphi=\psi\circ f$. $\overset{-1}{\psi}(Z)$ 是含 $f(E)$ 的一個緊 (T_2) 型空間. 事實上, $\overset{-1}{\psi}(Z)=\overset{-1}{P_B^A}\circ\psi_B(Z)$, $\varphi_B(Z)$ 是緊 (T_2) 型空間 Z 在 $\prod\limits_{\beta\in B}R_\beta$ 中的連續映像,所以仍是緊 (T_2) 型空間, 而依 P_B^A 的定義, $\overset{-1}{P_B^A}(\psi_B(Z))$ 是緊 (T_2) 型空間的積, 所以仍是緊 (T_2) 型的. 因此 $\overline{f(E)}$ 是緊的,從而 $W\equiv\psi(\overline{f(E)})$ 是 Z 中的緊集, 且包含 Y, $Y\subset W\subset Z$. 但 $Z=\overline{Y}\subset\overline{W}=W$(因爲 W 旣是 (T_2) 型空間中的緊集,它必是閉的),所以 $\psi(\overline{f(E)})=Z$.

系 1. 設 E 是全正則空間,那末 $f(E)$ 在 $\prod\limits_{\alpha\in A}R_\alpha$(符號的意義如前)中的閉包 $\beta(E)$ 是 E 的緊化,並且 E 上的每個實值有界連續函數可以延拓到整個 $\beta(E)$ 上去.

證. 依定義1下註3可知 $f(E)$ 是 E 的同胚像, 並且 $f(E)$ 在 $\prod\limits_{\alpha\in A}R_\alpha$ 中的閉包 $\overline{f(E)}$ 確是 $f(E)$ 的緊化. 如果將 $\overline{f(E)}$ 中的與 E 中點對應的點同 E 中原來的相應點等同, 那末得一與 $\overline{f(E)}$ 同胚且含 E 的緊 (T_2) 型空間 $\beta(E)$. 不難看出,

$$f_\alpha=P_{\{\alpha\}}^A\circ f\quad(\alpha\in A).$$

依定理, f_α 可以連續地延拓到整個 $\beta(E)$ 上去,而這延拓在 $\overline{f(E)}\setminus f(E)$ 上與 $P_{\{\alpha\}}^A$ 重合.

系 2. 如果 φ 是由全正則空間 E 到一個緊 (T_2) 型空間 Z 中的一個稠子集上的連續映像,那末 φ 可以延拓成由 $\beta(E)$ 到 Z 上的連續映像.

證. 這時,引用定理1的符號, $\varphi=\psi\circ f$, ψ 把 $\overline{f(E)}$ 連續地映像到 Z 上去,而 φ 的由 E 到 $\beta(E)$ 上的延拓在 $\overline{f(E)}\setminus f(E)$ 上與 ψ 重合.

定義 2. 定理1的系1中的緊 (T_2) 型擴張 $\beta(E)$ 叫做拓樸空間 E

的 Čech 緊擴張[1]。

註．定理 1 的系 2 說明，由全正則空間 E 到一個任意緊 (T_2) 型空間 Y 中的連續映像必可擴展成一個由 $\beta(E)$ 到 Y 中的連續映像，換句話說，Čech 緊擴張有下列性質：它可以連續地映像到 E 的任意緊 (T_2) 型擴張上去，且在這映像中，E 中的點保持不變．這一性質叫做 $\beta(E)$ 的極大性．

定理 2．設 Z 是含全正則空間 E 的緊 (T_2) 型空間，且 E 在 Z 中是稠的．如果 E 上每個有界連續函數可以延拓到 Z 上成爲 Z 上的連續函數，那末 Z 必與 $\beta(E)$ 同胚，並且如 ψ 表示由 Z 到 $\beta(E)$ 上的同胚映像，那末對於每個 $x\in E$，必然 $\psi(x)=x$．

證．設 φ 是由 E 到 $E\subset Z$ 上的不變映像：$x\to x(x\in E)$．在定理 1 的證明中，令 $B=A$，那末那裏所作的映像 $\psi=\psi_B^{-1}$（這時 P_A^A 是不變映像），並且 ψ 把 $\overline{f(E)}$ 同胚地映像到 Z 上．依定理 1 的系 2 的證，存在由 $\beta(E)$ 到 $Z\supset E$ 上的同胚映像使 E 的點都不變．

定理 3．設 Z 是含全正則空間 E 的一個緊 (T_2) 型擴張；設如 E 中任意兩集 A, B 在 E 中的閉包不相交時，它們在 Z 中的閉包也不相交，那末 E 上的每個有界連續函數可以延拓成 Z 上的有界連續函數，而 Z 與 $\beta(E)$ 同胚．

證．對於 Z 中每個開集 V，令 $R_\alpha(V)$ 表示數直綫上的有界閉集 $\overline{f_\alpha(V\cap E)}\subset R_\alpha$（符號見前）$(\alpha\in A)$．旣然 $R_\alpha(Z)$ 是緊的，$Z_\alpha(z)=$ $=\bigcap_{V\ni z}R_\alpha(V)\neq\phi$（$V$ 遍表 Z 中含 z 點的開集）．設 $s, t\in Z_\alpha(z)$，設 $s<t$．取數 $\varepsilon>0$ 滿足 $s+\varepsilon<t-\varepsilon$，那末 $\overset{-1}{f_\alpha}(]\leftarrow, s+\varepsilon])$ 與 $\overset{-1}{f_\alpha}([t-\varepsilon,\to[)$ 是 E 中不相交的閉集，從而依假定它們在 Z 中的閉包 H_1 與 H_2 也不相交．另一方面，依 $Z_\alpha(z)$ 的定義，凡含 z 的開集 V 必含點 z_1, $z_2\in E$，使

$$|f_\alpha(z_1)-s|<\varepsilon,\quad |f_\alpha(z_2)-t|<\varepsilon,$$

所以 $z\in H_1\cap H_2$．這與上述矛盾．因此 $Z_\alpha(z)$ 只能含一個實數，今用

1) E. Čech 是捷克數學家．

$g_a(z)$ 表示這個數．這樣定義出來的函數 $g_a(z)$ 是 f_a 在 Z 上的擴張．事實上，如果 $x\in E$，而 V 是 Z 中包含 x 的任意開集，那末 $f_a(x)\in R_a(V)$．因此 $g_a(x)=f_a(x)$．$g_a(z)$ 是 Z 上的連續函數．事實上，設 $\varepsilon>0$，而 $z_0\in Z_0$，必存在開集 V_0，使 $z_0\in V_0$，而 $R_a(V_0)\subset\,]\,g_a(z_0)-\varepsilon,\ g_a(z_0)+\varepsilon[$；因爲否則對於每個含 z_0 的開集 V，集 $R_a(V)$ 必含開區間 $]\,g_a(z_0)-\varepsilon,\ g_a(z_0)+\varepsilon\,[$ 以外的一點，由 $R_a(z)$ 的緊性，從而 $Z_a(z_0)$ 也含這樣一點．事實上，$\{R_a(V)\cap(]-\infty,g_a(z_0)-\varepsilon]\cup[g_a(z_0)+\varepsilon,+\infty[)\,|\,V\supset z_0\}$ 是一個具有窮交性質的閉集族，與上面證明了的事實 $Z_a(z_0)=\{g_a(z_0)\}$ 不符．如此，對於每個 $z\in V_0$，$g_a(z)\in R_a(V_0)$，所以

$$|g_a(z)-g_a(z_0)|<\varepsilon.$$

證完．

第四章　拓撲絡

在第一章中已經指出，可以由 Kuratowski 公理系統從閉包運算 $A\to\overline{A}(A\in\mathfrak{P}(E))$ 出發定義 E 上的拓撲結構． 這裏值得注意的乃是在公理中，點的概念並不出現，閉包運算只是 Boole 代數 $\mathfrak{P}(E)$ 中的映像．這引起如下的興趣，即不用點作原始概念來考慮拓撲結構的理論．寺板英孝(1937)開始把 Kuratowski 的方法與絡論結合起來，討論了拓撲絡的理論． G. Nöbeling 把這一論點系統發展，他的書也是在這種看法之下寫成的．與此相關的還有 H. Cartan 的滲透理論，這是用來推廣平常點列的收斂的，與第一章所論的定向列的收斂實際上是等價的．但在滲透理論中也是用集代替點作基本概念．這裏不打算詳細介紹這種看法，而只結合前三章所述扼要並提綱式地介紹一下拓撲絡的理論和滲透的理論． 特別注重後者，以便使學習的人不致對法國派的文獻(包括拓撲綫性空間理論方面的文獻)無法接觸．系統的描述請參看 Nöbeling 的書．

§1. 拓　撲　絡

定義 1. 一個序集 $\mathfrak{B}$ 叫做拓撲序集，是指有一由 $\mathfrak{B}$ 到自己之中的映像 $A\to\overline{A}$，滿足下列三個條件 (A、A_1、$A_2\in\mathfrak{B}$)：

$$(\mathrm{H}_0)\quad A_1\leq A_2\longrightarrow\overline{A}_1\leq\overline{A}_2;$$

$$(\mathrm{H}_1)\quad A\leq\overline{A};$$

$$(\mathrm{H}_2)\quad \overline{\overline{A}}=\overline{A}.$$

這個映像 $A\to\overline{A}$ 叫做閉包運算，$\overline{A}$ 叫做 A 的閉包．元 $A\in\mathfrak{B}$ 叫做閉的，是指 $A=\overline{A}$．元 $A\in\mathfrak{B}$ 叫做附着於 $B\in\mathfrak{B}$，是指 $A\leq\overline{B}$．這時我們說在序集 $\mathfrak{B}$ 上定義了一個拓撲結構(表示成 τ)．

註．1) 有兩種極端情形，相應於不足道的拓撲結構，即

(i) $\overline{A}=A$ (每個 $A\in\mathfrak{B}$)；

(ii) $\overline{A} = E$ (每個 $A \in \mathfrak{B}$, E 表 $\mathfrak{B}$ 中最大元).

(i) 相應於散拓撲結構,而 (ii) 相應於最粗拓撲結構.

2) 如序集 $\mathfrak{B}$ 有最大元 E, 那末 E 必是閉元, 因爲依 (H_1) 及最大元的定義,恆有 $E \leqslant \overline{E} \leqslant E$.

3) 如果一族閉元 (F_ι) ($\iota \in J$) 的交 $\bigwedge_{\iota \in J} F_\iota$ 在 $\mathfrak{B}$ 中存在, 那末這個交 F 也是閉元. 事實上, $F \leqslant F_\iota \Longrightarrow \overline{F} \leqslant \overline{F}_\iota = F_\iota$, 所以 $\overline{F} \leqslant F$, 而依 (H_1), $F \leqslant \overline{F}$,從而 $F = \overline{F}$.

4) 拓撲序集 $\mathfrak{B}$ 中一族閉元 (B_ι) ($\iota \in J$) 叫做形成 $\mathfrak{B}$ 的閉基, 是指 $\mathfrak{B}$ 中每個閉元是某些個 B_ι 的交. 這種閉基總是存在的,因爲可以取 (B_ι) 是一切閉元所成的族. 不難看出,如果 $\mathfrak{B}$ 的一個閉基 (B_ι) 中任意多個元在 $\mathfrak{B}$ 中有交,那末 $\mathfrak{B}$ 中任意多個閉元也必在 $\mathfrak{B}$ 中有交.

定義 2. 序集叫做結封的(簡稱 $\vee$-集),是指它裏面任意兩元必有上端(也叫做原來兩元的結). 對偶地可以定義交封序集(即 $\wedge$-集). 拓撲序集 $\mathfrak{B}$ 叫做古典的,是指 $\mathfrak{B}$ 是具最小元 O 的 $\vee$-集, 並滿足下列二條件:

$$(\mathrm{H}_3)\ \overline{A_1 \vee A_2} = \overline{A}_1 \vee \overline{A}_2;$$

$$(\mathrm{H}_4)\ \overline{O} = O.$$

這時 $\mathfrak{B}$ 的拓撲結構也叫做古典的.

註. 1) (H_1)—(H_4) 就是 Kuratowski 公理,並且注意 (H_0) 是 (H_3) 的直接後果.

2) 不難證明,在古典拓撲序集 $\mathfrak{B}$ 中, 有窮多個閉元之結仍是閉元.

定義 3. 設序集 $\mathfrak{B}$ 上有兩個拓撲結構 $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$. 如果對每個 $A \in \mathfrak{B}$,

$$\overline{A}^{\mathfrak{t}_1} \leqslant \overline{A}^{\mathfrak{t}_2},$$

(上式左、右兩邊各表示元 A 按 $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ 的閉包), 那末 $\mathfrak{t}_2$ 叫做比 $\mathfrak{t}_1$ 粗,或 $\mathfrak{t}_1$ 比 $\mathfrak{t}_2$ 精. 於是序集 $\mathfrak{B}$ 上一切拓撲結構組成一個序集,這個序集有最大元(就是散拓撲結構)與最小元(就是最粗拓撲結構).

註. 如果取 $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(E)$,即一集 E 的一切子集所成的 Boole 代數,

那末上述一切定義與第一章的相應定義都相符合. 讀者可以自作比較. 這時E叫做拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 的支柱.

定義 4. 如果拓撲序集 $\mathfrak{B}$ 的序結構是 Boole 代數,那末 $\mathfrak{B}$ 叫做拓撲 Boole 代數. $\underline{A}\equiv C\overline{CA}$ (CA 表示 $\mathfrak{B}$ 中 A 的補元: $A\vee CA=E$, $A\wedge CA=0$, E 與 O 各是 $\mathfrak{B}$ 中最大元與最小元)叫做元 A 的(開)核. 如果 $\mathfrak{B}$ 中元 A 滿足 $\underline{A}=A$, A 叫做開元. 拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中一個開元族 $\mathfrak{G}$ 叫做開基,是指 $\mathfrak{B}$ 中每個開元是 $\mathfrak{G}$ 中某些元的結.

註. 1) 爲了 G 是拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中的開元, 必須且只須 CG 是閉元. 事實上, $\overline{CG}=CG\Longrightarrow C\overline{CG}=G\Longrightarrow\underline{G}=G$.

2) 由對偶性不難看出下列幾個事實 (A_1, A_2, $A\in\mathfrak{B}$):

(i) $A_1\leqslant A_2\Longrightarrow\underline{A}_1\leqslant\underline{A}_2$;

(ii) $\underline{A}\leqslant A$;

(iii) $\underline{\underline{A}}=\underline{A}$;

(iv) 如果 $\mathfrak{B}$ 是古典的,那末 $\underline{A_1\wedge A_2}=\underline{A}_1\wedge\underline{A}_2$, 並且 E 與 O 都是開元.

3) 爲了拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中一族開元 $\mathfrak{G}$ 是開基, 必須且只須 $\{F|F=CG,\ G\in\mathfrak{G}\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的閉基.

4) 在拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中,任意多個開元的結仍是開元. 如果 $\mathfrak{B}$ 是古典的,那末有窮多個開元的交仍是開元.

定理 1. 在拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中,有下列命題成立:

1) $A_1\vee A_2=E\Longrightarrow\overline{A}_1\vee\underline{A}_2=E$;

$A_1\wedge A_2=O\Longrightarrow\overline{A}_1\wedge\underline{A}_2=O$;

2) 爲了 $G(\in\mathfrak{B})$ 是開元,必須且只須 $A\wedge G=O\Longrightarrow\overline{A}\wedge G=O$;

3) 如果F閉而G開, 那末 $F\wedge CG$ 是閉元;

4) $\underline{A}$ 是 $\leqslant A$ 的最大開元.

證. 1) $A_1\vee A_2=E\Longrightarrow A_2\geqslant CA_1$, 所以 $\underline{A}_2\geqslant\underline{CA_1}=C\overline{A}_1$, 從而 $\overline{A}_1\vee\underline{A}_2=E$. 第二部分乃是第一部分的對偶.

2) 設 $A\wedge G=O\Longrightarrow\overline{A}\wedge G=O$. 令 $F=CG$, 那末 $F\wedge G=O$, 從而 $\overline{F}\wedge G=O$, 所以 $\overline{F}\leqslant CG=F$, 即 $\overline{F}=F$. 依定義 4 下註 1, G

是開的．其逆由 1) 得出．

3) 如果 F 閉，G 開，CG 是閉的，則依定義 1 下註 3 得證．

4) 由定義 4 下註 2 的 (ii)，(iii) 已知 $\underline{A}$ 是 $\leqslant A$ 的開元． 設 G 是開元並且 $G \leqslant A$，那末依定義 4 下註 2 的 (i)，$\underline{G} \leqslant \underline{A}$．但 $\underline{G} = G$，所以 $G \leqslant \underline{A}$．

定理 2．在古典拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中，有下列命題成立：

1) 如果 F 是閉元，G 是開元，那末 $G \wedge CF$ 是開元；

2) $\overline{A}_1 \wedge \underline{A}_2 = \overline{A_1 \wedge A_2} \wedge \underline{A}_2$．

證．1) 由定義 4 下註 3 直接得出．

2) 因 $A_1 = (A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge CA_2)$，所以 $\overline{A}_1 = \overline{A_1 \wedge A_2} \vee \vee \overline{A_1 \wedge CA_2}$，從而 $\overline{A}_1 \wedge \underline{A}_2 = (\overline{A_1 \wedge A_2} \wedge \underline{A}_2) \vee (\overline{A_1 \wedge CA_2} \wedge \underline{A}_2)$．但因 $(A_1 \wedge CA_2) \wedge A_2 = O$，由定理 1 的 1 可知 $\overline{A_1 \wedge CA_2} \wedge \underline{A}_2 = O$．從而定理得證．

定義 5． 在拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中，元 N 叫做 A 的鄰域，是指 $A \leqslant \underline{N}$．

定理 3． 為了 $A \wedge \overline{B} > O$，必須且只須 $V \in \mathfrak{V}(A) \Longrightarrow V \wedge \wedge B > O$．

證．設 $V \in \mathfrak{V}(A) \Longrightarrow V \wedge B > O$；設 $A \wedge \overline{B} = O$，那末 $A \leqslant C\overline{B}$，從而 $C\overline{B}$ 是開元且 $\in \mathfrak{V}(A)$，於是得出 $C\overline{B} \wedge B > O$．但另一方面，$C\overline{B} \wedge B \leqslant CB \wedge B = O$．矛盾．反之，設 $A \wedge \overline{B} > O$，$\underline{V} \geqslant A$，如果 $V \wedge B = O$，則 $\overline{B} \wedge \underline{V} = O$，與 $A \wedge \overline{B} > O$ 矛盾．

定理 4．設 $\mathfrak{B}$ 是古典拓撲 Boole 代數，$A \in \mathfrak{B}\,(A \neq O)$，那末 A 的鄰域全體 $\mathfrak{V}(A)$ 是 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中的真對偶幻（即不含 O）．

註．這裏的這種真對偶幻以後叫做滲透． 注意對於一般的滲透，任意有窮多個元的交必不是 O．

證．由定義 4 下註 2 的 (iv) 與 (i) 得出．

下面考慮幾種分離性．

定義 6．拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 叫做 (T_1) 型，是指對於任意兩元 A_0 與 $A_1 \ngeqslant A_0$，必存在開元 G_1，使 $A_1 \leqslant G_1$，但 $A_0 \nleqslant G_1$．

註. 如果$\mathfrak{B}$是拓撲空間E的一切子集所形成的 Boole 代數, 那末爲了$\mathfrak{B}$是(T_1)型, 必須且只須E是(T_1)型拓撲空間. 事實上, 設A_0, A_1是E中兩子集, 而$A_0 \not\leq A_1$, 那末必存在一點$q \in A_0 \setminus A_1$. 令G表示包含A_1中點p但不含點q的一切開集U的併集, 那末G是A_1的鄰域, 但$A_0 \not\leq G$. 這就是說, 如果E是(T_1)型空間, $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{N}(E)$是$(T_1)$型. 反之, 如果$\mathfrak{N}(E)$是$(T_1)$型. 設$A_0 = \{p\}$, $A_1 = \{q\}$, $p \neq q$, $p, q \in E$, 那末依假定, 存在開集G_1, 使$\{p\} \subset G_1$, $\{q\} \not\subset G_1$, 即$G_1 \ni p$, 而$\not\ni q$. 同理存在開集G_2, 使$G_2 \not\ni p$, $G_2 \ni q$. 因此E是(T_1)型空間.

定理 5. 爲了 Boole 代數$\mathfrak{B}$是(T_1)型, 必須且只須其中每元是一些閉元的結, 或必須且只須每元是它的一切開鄰域的交.

證. 定理中兩個條件是對偶的, 從而只須對其中一個證明. 設$\mathfrak{B}$是(T_1)型的. 一般, 令$\mathfrak{G}$是$\mathfrak{B}$中一切開元的全體, 則對於任意$A \in \mathfrak{B}$,

$$A \leqslant \wedge \{G | G \in \mathfrak{G},\ G \geqslant A\} \equiv A_1.$$

如果$A \lneqq A_1$, 那末$A \not\geqslant A_1$, 從而依假定, $\exists G_1 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \geqslant A$, $G_1 \not\geqslant A_1$, 這與A_1的定義矛盾. 所以$A = A_1$. 反之, 設$\mathfrak{B}$中每元是它的一切開鄰域的交; 設$A_0 \not\leqslant A_1$, $A_0, A_1 \in \mathfrak{B}$. 依假定,

$$A_1 = \wedge \{G | G \in \mathfrak{G},\ G \geqslant A_1\}.$$

既然$A_0 \not\leqslant A_1$, 不可能$G \in \mathfrak{G}$, $G \geqslant A_1 \Longrightarrow G \geqslant A_0$, 從而$\exists G_1$, $G_1 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \geqslant A_1$, $G_1 \not\geqslant A_0$. 證完.

定理 6. 爲了拓撲 Boole 代數$\mathfrak{B}$是(T_1)型, 必須且只須每個$> O$的元必含一個閉元$> O$.

證. 必要性由定理 5 看出. 反之, 如果條件滿足, 而$X \in \mathfrak{B}$. 如果$X = O$, O本身是閉元, 從而不待證. 如果$X > O$, 必存在閉元$A > O$, 使$A \leqslant X$. 令$X_0 = V\{A | A = \bar{A},\ A \leqslant X\}$. 如果$X_0 < X$, 那末$X \wedge cX_0 \neq O$, 從而存在閉元$B > O$, 使$B \leqslant X \wedge cX_0$. 於是依$X_0$的定義, $X_0 \geqslant B$, 從而

$$B \leqslant (X \wedge cX_0) \wedge X_0 = O,$$

與$B > O$的假設衝突. 證完.

定義 7. 設$\mathfrak{B}$是拓撲分配格, $A \in \mathfrak{B}$. 設$\mathfrak{B}_A$表示$\mathfrak{B}$中一切$\leqslant A$

的元全體組成的分配子絡． 設對於 $B\in\mathfrak{B}_A$，定義 $\overline{B}^A=\overline{B}\wedge A$，那末 $\mathfrak{B}_A$ 成爲拓撲絡，叫做 $\mathfrak{B}$ 的拓撲子絡．

註．$B\to\overline{B}^A$ 確滿足 (H_0)—(H_4)． 事實上，$(\mathrm{H}_0)(\mathrm{H}_1)(\mathrm{H}_3)(\mathrm{H}_4)$ 不待證，而 $\overline{\overline{B}^A}^A=\overline{\overline{B}^A}\wedge A=\overline{\overline{B}\wedge A}\wedge A\leqslant(\overline{\overline{B}}\wedge\overline{A})\wedge A=\overline{\overline{B}}\wedge$ $\wedge A=\overline{B}^A$，但由已證了的 (H_1) 可知 $\overline{\overline{B}^A}^A\geqslant\overline{B}^A$，從而 (H_2) 也證明了．

定理 7．如果拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 是 (T_1) 型的，而 $A\in\mathfrak{B}$，那末 $\mathfrak{B}_A$ 也是 (T_1) 型的．

證．如果 $B\in\mathfrak{B}_A$，$B>O$，依定理 6，$\exists$ 閉元 $F>O$，$F\in\mathfrak{B}$，$F\leqslant B$，所以 $B\in\mathfrak{B}_A$，$B\leqslant A$，$F\leqslant A$，$F\in\mathfrak{B}_A$，並且

$$\overline{F}^A=\overline{F}\wedge A=F\wedge A=F,$$

於是 F 在 $\mathfrak{B}_A$ 中閉．依定理 6，$\mathfrak{B}_A$ 也是 (T_1) 型的．

與拓撲空間的分離性相應，我們引入拓撲 Boole 代數的其它種種分離性．

定義 8．拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 叫做 (T_2) 型的或分離的，(T_3) 型的或正則的，(T_4) 型的或正規的，(T_5) 型的或全正規的，各相應地是指它滿足下列公理：

(T_2) 公理．對於 $A_0,A_1\in\mathfrak{B}$，$A_0>O$，$A_1>O$，$A_0\wedge A_1=O$，必存在開元 G_0,G_1，使 $A_0\wedge G_0>O$，$A_1\wedge G_1>O$，且 $G_0\wedge G_1=O$；

(T_3) 公理．設 A_0、$F_1\in\mathfrak{B}$，$A_0>O$，F_1 閉，$A_0\wedge F_1=O$，必存在兩個開元 G_0,G_1，使 $A_0\wedge G_0>O$，$F_1\leqslant G_1$，$G_0\wedge G_1=O$；

(T_4) 公理．設 F_0、F_1 是 $\mathfrak{B}$ 中兩閉元，$F_0\wedge F_1=O$，必存在兩開元 G_0,G_1，使 $F_0\leqslant G_0$，$F_1\leqslant G_1$，且 $G_0\wedge G_1=O$；

(T_5) 公理．設 F_0、F_1 是 $\mathfrak{B}$ 中兩元，$F_0\wedge\overline{F}_1=O=\overline{F}_0\wedge F_1$，必存在兩開元 G_0,G_1，使 $F_0\leqslant G_0$，$F_1\leqslant G_1$，且 $G_0\wedge G_1=O$．

註．1) 由定義直接看出，爲了 (T_1) 型空間 E 是正規空間，必須且只須相應的拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{R}(E)$ 是 (T_1) 型並且是 (T_4) 型的；同樣，爲了 (T_1) 型空間 E 是全正規空間，必須且只須相應的拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{R}(E)$ 是 (T_1) 型並且是 (T_5) 型的． 下面將看到對於其它分離性也有類似命題成立．

2) 全正規性蘊涵正規性. 又正規 (T_1) 型拓撲 Boole 代數必是 (T_2) 型的. 事實上, 設 $A_0, A_1 \in \mathfrak{B}$, $A_0 > O$, $A_1 > O$, $A_0 \wedge A_1 = O$, 依定理6, 存在閉元 $F_1 > O$, $F_1 \leq A_1$. 於是 $A_0 \wedge F_1 = O$, 從而依公理 (T_3), 存在開元 G_0, G_1, 使 $A_0 \wedge G_0 > O$, $F_1 \leq G_1$, $G_0 \wedge G_1 = O$. 於是 $G_1 \wedge A_1 \geq F_1 > O$, 從而公理 (T_2) 滿足.

定理 8. 為了拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 是正則的, 必須且只須它滿足下列條件:

公理 (T_3'). 設 $A \in \mathfrak{B}$, $A > O$, H 是開元, $A \wedge H > O$, 那末必存在開元 G, 使 $A \wedge G > O$, $\bar{G} \leq H$.

證. 設公理 (T_3) 滿足, $A > O$, H 是開元, $A \wedge H > O$. 令 $A \wedge H = A_0$, $cH = F_1$, 那末 $A_0 > O$, F_1 是閉元, $A_0 \wedge F_1 = O$, 從而依公理 (T_3), 存在開元 G 與 G_1, 使 $A_0 \wedge G > O$, $F_1 \leq G_1$, $G \wedge G_1 = O$. 於是 $A \wedge G \geq A_0 \wedge G > O$, $\bar{G} \leq cG_1 \leq cF_1 = H$.

反之, 設公理 (T_3') 滿足, 而設 $A_0 > O$, F_1 是閉元, $A_0 \wedge F_1 = O$. 令 $cF_1 = H$, 那末 H 是開元, 並且 $A_0 \wedge H > O$. 依公理 (T_3'), 存在開元 G_0, 使 $A_0 \wedge G_0 > O$, $\bar{G}_0 \leq H$. 令 $c\bar{G}_0 = G_1$, 於是 G_0 與 G_1 是開元, $A_0 \wedge G_0 > O$, $F_1 = cH \leq c\bar{G}_0 = G_1$, $G_0 \wedge G_1 \leq G_0 \wedge cG_0 = O$. 證完.

註. 由定理8立刻看出, 為了 (T_1) 型拓撲空間 E 是正則的, 必須且只須 $\mathfrak{R}(E)$ 是 (T_3) 型拓撲 Boole 代數. 事實上, 如果 E 是正則空間, 設 A 是不空集, H 是開集, $A \cap H \neq \phi$, 必存在點 $x \in A \cap H$, 從而 $x \in H$. 於是依正則空間的性質, 存在 x 的開鄰域 V, 使 $x \in V \subset \bar{V} \subset H$. 於是 $A \cap V \supset \{x\} \neq \phi$, $\bar{V} \subset H$, 從而公理 (T_3') 成立. 反之, 設 $\mathfrak{R}(E)$ 滿足公理 (T_3'), 取 $A = \{x\}$, $x \in H$, H 是開集, 那末依公理 (T_3') 必存在開集 V, 使 $\{x\} \cap V \neq \phi$, $\bar{V} \subset H$, 也就是說, $x \in V \subset \bar{V} \subset H$, 從而 E 是正則的.

定義 9. 拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 叫做具正則基 $\mathfrak{G}$, 是指每個開元 G 可以表示成

$$G = \bigvee\{B \mid B \in \mathfrak{G}, \bar{B} \leq G\}.$$

定理 9. 爲了拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 是正則的，必須且只須 $\mathfrak{B}$ 具正則基. 如果 $\mathfrak{B}$ 是正則的，那末 $\mathfrak{B}$ 的每個開基是正則的.

證. 設 $\mathfrak{B}$ 滿足公理 (T_3)；設 $\mathfrak{G}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的任意開基；設 H 是 $\mathfrak{B}$ 中開元；設 $H \neq V\{B | B \in \mathfrak{G}, \bar{B} \leqslant H\}$，那末必存在 $C \in \mathfrak{B}$，使 $B \in \mathfrak{G}$ 且 $\bar{B} \leqslant H \Longrightarrow B \leqslant C$，但 $H \nleqslant C$. 令 $cC = A$，那末 $A \wedge H > O$. 依定理 8，必存在開元 G，使 $A \wedge G > O$，$\bar{G} \leqslant H$. 依開基的定義，存在一元 $B \in \mathfrak{G}$，使 $A \wedge B > O$，$B \leqslant G$，因爲否則凡滿足 $B \leqslant G$ 的 $\mathfrak{G}$ 中元 B 必滿足 $A \wedge B = O$，於是 $B \leqslant cA$，從而依開集的定義，$G \leqslant cA$ 與 $G \wedge A > O$ 矛盾. 從而 $\bar{B} \leqslant H$，所以依 C 的定義，$B \leqslant C$ 與 $cC \wedge \wedge B > O$ 矛盾.

反之，設 $\mathfrak{B}$ 具正規基 $\mathfrak{G}$；設 $A \in \mathfrak{B}$，H 是開元且 $A \wedge H > O$，於是存在開元 $G \in \mathfrak{G}$，使 $A \wedge G > O$，$\bar{G} \leqslant H$，因爲否則與上面一樣可以證明 $H \leqslant cA$ 與 $A \wedge H > O$ 矛盾. 但是公理 (T_3') 成立，從而 $\mathfrak{B}$ 是正則的. 最後命題已在證明的第一部分證出來了.

定義 10. 在拓撲 σ-備 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中，元 A 叫做 F_σ（或 G_δ）元，是指它是可數多個閉元（開元）的結（交）.

定理 10. 設 $\mathfrak{B}$ 是正則拓撲 Boole 代數，並且設 $\mathfrak{B}$ 具有可數開基，那末每個閉元必是 G_δ 一元，每個開元必是 F_σ 元.

證. 兩個結論是互相對偶的，從而只證明開元 G 的情形就够了. 設 $\mathfrak{G} = \{G_i | i = 1, 2, \cdots\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一個可數開基，依定理 9，$\mathfrak{G}$ 是正則的，從而

$$G = V\{B_{n_i} | \bar{B}_{n_i} \leqslant G\},$$

從而

$$G = V\{\bar{B}_{n_i} | \bar{B}_{n_i} \leqslant G\}$$

是 F_σ 一元. 證完.

定理 11. 爲了拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 是正規的，必須且只須它滿足下列條件：

公理 (T_4'). 如果 F 是閉元，H 是開元，$F \leqslant H$，那末必存在開元 G，使 $F \leqslant G \leqslant \bar{G} \leqslant H$.

證．設 $\mathfrak{B}$ 是正規的；設 F 是閉元，H 是開元，$F \leqslant H$．令 $F = F_0$，$cH = F_1$，於是 F_0，F_1 是閉元並且 $F_0 \wedge F_1 = O$．依公理 (T_4)，存在兩開元 G_0，G_1，使 $F_0 \leqslant G_0$，$F_1 \leqslant G_1$，且 $G_0 \wedge G_1 = O$．令 $G_0 = G$，於是 $F \leqslant G$，而 $\overline{G} \leqslant cG_1 \leqslant cF_1 = H$．

反之，設 $\mathfrak{B}$ 滿足條件 (T_4')；設 F_0 與 F_1 是閉元，$F_0 \wedge F_1 = O$．令 $cF_1 = H$，那末 H 是開元並且 $F_0 \leqslant H$．依條件 (T_4') 存在開元 G_0，使 $F_0 \leqslant G_0 \leqslant \overline{G}_0 \leqslant H$．令 $c\overline{G}_0 = G_1$，那末 G_1 是開元，而 $F_1 = cH \leqslant$ $\leqslant c\overline{G}_0 = G_1$，並且 $G_0 \wedge G_1 \leqslant G_0 \wedge cG_0 = O$．證完．

定理 12． 爲了拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 是正規的，必須且只須它滿足下列條件：

(T_4'') 對於 $\mathfrak{B}$ 中任意有窮多個開元 $V_1, \cdots, V_n$，如果 $\bigvee_{i=1}^{n} V_i = E$（$\mathfrak{B}$ 中最大元），必存在開元 $U_1, \cdots, U_n$，使 $\overline{U}_i \leqslant V_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 並且 $\bigvee_{i=1}^{n} U_i = E$．

證．今只須證條件 (T_4'') 與 (T_4') 等價．

設條件 (T_4') 成立；設 $V_1, \cdots, V_n$ 是 $\mathfrak{B}$ 中開元並且 $\bigvee_{i=1}^{n} V_i = E$．令 $F_1 \equiv c(V_2 \vee \cdots \vee V_n)$，於是 F_1 是閉元．因 $E = V_1 \vee cF_1$，可知 $F_1 \leqslant V_1$．依條件 (T_4') 存在開元 U_1，使 $F_1 \leqslant U_1 \leqslant \overline{U}_1 \leqslant V_1$．於是由 $F_1 = c(V_2 \vee \cdots \vee V_n) \leqslant U_1$ 可知 $U_1 \vee V_2 \vee \cdots \vee V_n = E$．於是由數學歸納法不難完成證明．

反之，設條件 (T_4'') 滿足；設 F 是閉元，H 是開元，$F \leqslant H$，於是 $cF \vee H = E$，cF 與 H 都是開元．依條件 (T_4'') 存在開元 G_0，G_1，使 $\overline{G}_0 \leqslant cF$，$\overline{G}_1 \leqslant H$，$G_0 \vee G_1 = E$．於是 $G_0 \leqslant \overline{G}_0 \leqslant cF$，從而 $F \leqslant cG_0 \leqslant G_1$．$G_1$ 於是就是滿足條件 (T_4') 的要求的開元．

系 1． 設 $\mathfrak{B}$ 是正規拓撲 Boole 代數，F 是其中閉元，$V_1, \cdots, V_n$ 是其中開元，使 $\bigvee_{i=1}^{n} V_i \geqslant F$．於是必存在開元 $U_1, \cdots, U_n$，使

$\overline{U}_i \leqslant V_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, $\bigvee_{i=1}^{n} U_i \geqslant F$.

證. 令 $cF = V_0$, 那末 $V_0, V_1, \cdots, V_n$ 是開元並且 $\bigvee_{i=0}^{n} V_i = E$. 於是依定理12、存在開元 U_i,使 $\overline{U}_i \leqslant V_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ 並且 $\bigvee_{i=0}^{n} U_i = E$. 於是 $F = cV_0 = cV_0 \wedge \bigvee_{i=0}^{n} U_i = \bigvee_{i=0}^{n} (U_i \wedge cV_0) \leqslant \bigvee_{i=1}^{n} U_i$.

系 2. 設 $\mathfrak{B}$ 是正規拓撲 Boole 代數, F 是其中閉元, $(V_\iota)(\iota \in J)$ 是一族開元,使對於每個元 $A \leqslant F$,如果 $A \wedge V_\iota = O$ 對每個 $\iota \in J$ 成立,必然 $A = O$. 又設對於每個 $\iota_0 \in J$, 至多有有窮多個 $\iota \in J$, 使 $V_{\iota_0} \wedge V_\iota > O$. 於是必存在一族開元 $(U_\iota)(\iota \in J)$,使 $\overline{U}_\iota \leqslant V_\iota (\iota \in J)$ 並且

$$(A \leqslant F, \iota \in J \Longrightarrow A \wedge U_\iota = O) \Longrightarrow A = O. \tag{1}$$

證. 正如同由定理12很容易推出系1那樣, 無妨只考察 $F = E$ 的情形. 我們把滿足條件(1)的元族 (U_ι) 叫做 F 的開覆蓋 [如果 $\bigvee_{\iota \in J} U_\iota$ 在 $\mathfrak{B}$ 中存在, 那末這個定義確實與拓撲空間中覆蓋的定義相符,即條件(1)等價於 $\bigvee_{\iota \in J} U_\iota \geqslant F$]. 事實上, 如果 $F \leqslant \bigvee_{\iota \in J} U_\iota$ 並且 $A \leqslant F$,而 $A \wedge U_\iota = O$ 對一切 $\iota \in J$ 成立,那末 $A = A \wedge F \leqslant A \wedge \bigvee_{\iota \in J} U_\iota = \bigvee_{\iota \in J} (A \wedge U_\iota) = O$,從而 $A = O$. 反之,設 $F \not\leqslant \bigvee_{\iota \in J} U_\iota$, 那末 $A \equiv F \wedge c \bigvee_{\iota \in J} U_\iota > O$,而 $A \wedge U_\iota = O$ 對一切 $\iota \in J$ 成立. 今考察 E 的一切滿足下列條件的開覆蓋 $\mathfrak{W} = (W_\iota)_{\iota \in J}$ 的全體 Ω: $\overline{W}_\iota \leqslant V_\iota$ 或 $W_\iota = V_\iota$(每個 $\iota \in J$). 對於 $\mathfrak{W} \in \Omega$,令 $J_{\mathfrak{W}} \equiv \{\iota | \iota \in J, \overline{W}_\iota \leqslant V_\iota\}$. 注意 $(V_\iota)_{\iota \in J} \in \Omega$,從而 $\Omega \neq \phi$. 在 Ω 中定義次序如下:令 $\mathfrak{W}^1 \equiv (W^1_\iota)(\iota \in J) \in \Omega$, $\mathfrak{W}^2 \equiv (W^2_\iota)(\iota \in J) \in \Omega$,規定 $\mathfrak{W}^1 \prec \mathfrak{W}^2$, 是指對於每個 $\iota \in J_{\mathfrak{W}^1}$, $W^1_\iota = W^2_\iota$ (從而 $J_{\mathfrak{W}^1} \subset J_{\mathfrak{W}^2}$). 不難看出 Ω 成爲序集. 取 K 爲 Ω 中一個全序子集. 設 $J_0 = \bigcup \{J_{\mathfrak{W}} | \mathfrak{W} \in K\}$. 對於每個

$\iota\in J_0$,令 $W^0_\iota=W_\iota$,如果 $\mathfrak{W}\in K$,而 $\overline{W}_\iota\leqslant V_\iota$. 這個 W^0_ι 的定義與滿足上述條件的 $\mathfrak{W}\in K$ 的選擇無關. 對於 $\iota\in J\setminus J_0$,令 $V_\iota=W^0_\iota$. 於是 $\mathfrak{W}^0=(W^0_\iota)(\iota\in J)$ 是E的開覆蓋. 事實上,設 $A\wedge W^0_\iota=O$ 對每個 $\iota\in J$ 成立,如果 $A>O$,存在一元 B, $O<B\leqslant A$, $B\wedge V_\iota>O$ 最多只對有窮多個 $\iota\in J$ 成立,這些 ι 表示成 $\iota_1,\cdots,\iota_n$. 事實上,至少有一 $\iota'\in J$, 使 $A\wedge V_{\iota'}>O$, 因爲否則 A 就 $=O$ 了. 這時可令 $B=A\wedge V_{\iota'}$. 依關於 (V_ι) 的假定,滿足 $B\wedge V_\iota>O$ 的 ι 至多有有窮多個. 既然K是全序的,從而$(J_{\mathfrak{W}})_{\mathfrak{W}\in K}$ 也全序起來,於是必存在一個 $\mathfrak{W}\in K$, 使上述的諸 $\iota_k\in J_{\mathfrak{W}}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, 於是 $W^0_{\iota_k}=W_{\iota_k}\in\mathfrak{W}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$. $\mathfrak{W}$既是E的覆蓋,並且$\iota\in J\Longrightarrow W_\iota\leqslant V_\iota$,而$B\wedge V_\iota=O$ 對每個 $\iota\neq\iota_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 成立, 可知 $B\leqslant W_{\iota_1}\vee\cdots\vee W_{\iota_n}=$ $=W^0_{\iota_1}\vee\cdots\vee W^0_{\iota_n}$,這與 $O<B\leqslant A$, $A\wedge W^0_\iota=O$ $(\iota\in J)$ 矛盾. 於是得證 $\mathfrak{W}^0$ 是E的開覆蓋. $\mathfrak{W}^0\in\Omega$ 不待證. 於是 Ω 滿足 Zorn 輔助定理的條件,從而 Ω 具有極大元 $\mathfrak{W}^*\equiv(U_\iota)(\iota\in J)$. 對於每個 $\iota\in J$, $\overline{U}_\iota\leqslant V_\iota$ 或 $U_\iota=V_\iota$. 設有一 $\iota_0\in J$ 使 $\overline{U}_{\iota_0}\leqslant V_{\iota_0}$. 滿足 $U_\iota\wedge V_{\iota_0}>O$ 的 U_ι 至多有有窮多個,因爲 $U_\iota\leqslant V_\iota$. 於是 $U=\vee\{U_\iota|U_\iota\wedge V_{\iota_0}>O\}$ 存在. 令 $F=cU\wedge\overline{V}_{\iota_0}$, F 是閉元,而因 $\overline{V}_{\iota_0}\wedge cV_{\iota_0}\leqslant E=\bigvee_{\iota\in J}U_\iota$, 所以 $\overline{V}_{\iota_0}\wedge cV_{\iota_0}\leqslant U$,因爲 $\overline{V}_{\iota_0}\wedge U_\iota>O\Longrightarrow V_{\iota_0}\wedge U_\iota>O\Longrightarrow U_\iota\leqslant U$. 於是 $F=cU\wedge\overline{V}_{\iota_0}=cU\wedge\overline{V}_{\iota_0}\wedge(V_{\iota_0}\vee cV_{\iota_0})=cU\wedge V_{\iota_0}\leqslant V_{\iota_0}$. 依定理 11,存在開元 W_{ι_0} 使 $F\leqslant W_{\iota_0}\leqslant\overline{W}_{\iota_0}\leqslant V_{\iota_0}$. 對每個 $\iota\neq\iota_0$, 令 $W_\iota=U_\iota$, 於是 $(W_\iota)(\iota\in J)$ 成爲E的開覆蓋,並且 $(W_\iota)\in\Omega$, $(U_\iota)_{\iota\in J}<(W_\iota)_{\iota\in J}$ 與 (U_ι) 的極大性矛盾. 於是得證 $(U_\iota)_{\iota\in J}$ 就是所求的.

系 3. 設 $\mathfrak{B}$ 是正規拓撲備 Boole 代數, F 爲其中閉元, $(V_\iota)_{\iota\in J}$ 是 F 的開覆蓋, 並且對於每個元 $A>O$, $\exists$ $B\in\mathfrak{B}$, $O<B\leqslant A$, $B\wedge V_\iota>O$ 至多對有窮多個 $\iota\in J$ 成立, 那末必存在 F 的開覆蓋 $(U_\iota)_{\iota\in J}$,使對每個 $\iota\in J$, $\overline{U}_\iota\leqslant V_\iota$.

證. 與系 2 的證明完全一樣.

定義 11. 一個絡 $\mathfrak{B}$ 中兩個 n 元族 $\{A_1, \cdots, A_n\}$, $\{B_1, \cdots, B_n\}$ 叫做相似,是指對於任意一組在 1 與 n 之間的自然數 $i_1, \cdots, i_k$,必然

$$A_{i_1} \wedge \cdots \wedge A_{i_k} = O \Longleftrightarrow B_{i_1} \wedge \cdots \wedge B_{i_k} = O.$$

定理 13. 爲了古典拓撲的 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 是正規的,必須且只須下列條件滿足:

條件 (T_4'''). 對每 n 個閉元 $\{F_1, \cdots, F_n\}$, 必存在 n 個開元 $\{G_1, \cdots, G_n\}$, 使 $F_i \leqslant G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 並且 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ 與 $\{\overline{G}_1, \cdots, \overline{G}_n\}$ 相似.

證. 設 $\mathfrak{B}$ 是正規的;設 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ 是一組閉元. 令

$$F = V\{F_{i_1} \wedge \cdots \wedge F_{i_k} | F_{i_1} \wedge \cdots \wedge F_{i_k} \wedge F_1 = O,$$
$$1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant n, k \in N\}.$$

於是 F 是閉元,並且 $F \wedge F_1 = O$. $H_1 = cF$ 是開元,並且 $F_1 \leqslant H_1$. 依 $\mathfrak{B}$ 的正規性, 必存在開元 G_1, 使 $F_1 \leqslant G_1 \leqslant \overline{G}_1 \leqslant H_1$. 於是 $\{\overline{G}_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 與 $\{F_1, \cdots, F_n\}$ 相似. 由歸納法不難完成證明.

反之,設 $\mathfrak{B}$ 滿足條件 (T_4'''). 對 $n = 2$,立刻得出 (T_4) 來.

定理 14 (Тихонов А. Н.). 具可數基的正則古典拓撲 σ 備 Boole 代數必是全正規的.

註. 這說明, 對於具可數基的古典拓撲 σ 備 Boole 代數說, 正則性,正規性與全正規性三個概念是一致的.

證. 設 $\mathfrak{G}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一個可數開基. 依定理 9, $\mathfrak{G}$ 是正則基. 設 F_0 與 F_1 是 $\mathfrak{B}$ 中兩元,而 $F_0 \wedge \overline{F}_1 = O = \overline{F}_0 \wedge F_1$. 既然 $\mathfrak{G}$ 是正則基,必存在 $B_i^{(0)}, B_i^{(1)} \in \mathfrak{G}$ $(i = 1, 2, \cdots)$,使 $c\overline{F}_0 = \bigvee_n B_n^{(0)}$, $c\overline{F}_1 = \bigvee_n B_n^{(1)}$, 而且

$$\overline{F}_0 \wedge \overline{B}_n^{(0)} = O, \quad \overline{F}_1 \wedge \overline{B}_n^{(1)} = O \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

今定義 $G_1^{(0)} = B_1^{(1)}$, $G_1^{(1)} = B_1^{(0)} \wedge c\overline{G}_1^{(0)}$,

$$G_n^{(0)} = B_n^{(1)} \wedge c\bigvee_{k=1}^{n-1} \overline{G}_k^{(1)}, \quad G_n^{(1)} = B_n^{(0)} \wedge c\bigvee_{k=1}^{n} \overline{G}_k^{(0)} \ (n = 1, 2, \cdots),$$

於是 $G_n^{(0)}, G_n^{(1)}$ 都是開元. 令 $G_0 = \bigvee_{n=1}^{\infty} G_n^{(0)}$, $G_1 = \bigvee_{n=1}^{\infty} G_n^{(1)}$. 既然

$F_0 \wedge \overline{F}_1 = O$,所以 $F_0 \leqslant c\overline{F}_1$,從而一方面 $F_0 \leqslant \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} B_n^{(1)}$. 但 $\overline{F}_0 \wedge \overline{B}_k^{(0)} =$ $= O$,並且 $G_k^{(1)} \leqslant B_k^{(0)}$,所以 $F_0 \wedge \overline{G}_k^{(1)} = O$, $F_0 \leqslant c\bigvee\limits_{k=1}^{n-1} \overline{G}_k^{(1)}$. 於是

$$F_0 = \Big(\bigvee_n B_n^{(1)}\Big) \wedge F_0 = \bigvee_n (B_n^{(1)} \wedge F_0) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_n \Big(B_n^{(1)} \wedge c\bigvee_{k=1}^{n-1} \overline{G}_k^{(1)}\Big) = G_0.$$

同理 $F_1 \leqslant G_1$. 對於 $n < m$, $G_m^{(0)} \wedge G_n^{(1)} \leqslant c\bigvee\limits_{k=1}^{m-1} \overline{G}_k^{(1)} \wedge G_n^{(1)} = O$, 而對於 $n \geqslant m$, $G_m^{(0)} \wedge G_n^{(1)} \leqslant G_m^{(0)} \wedge c\bigvee\limits_{k=1}^{n} \overline{G}_k^{(0)} = O$,從而 $G_0 \wedge G_1 = O$. 於是 $\mathfrak{B}$ 的全正規性證完.

定理 15. 設 $\mathfrak{B}$ 是拓撲 Boole 代數, $D \in \mathfrak{B}$. 如果 $\mathfrak{B}$ 是分離的,正則的或全正規的,則 $\mathfrak{B}_D$ 也各是分離的,正則的或全正規的.

證. 設 $\mathfrak{B}$ 是 (T_2) 型的. 設 $A_0, A_1 \in \mathfrak{B}_D$, $A_0 > O$, $A_1 > O$, $A_0 \wedge A_1 = O$, 於是在 $\mathfrak{B}$ 中存在開元 G_0, G_1,使 $A_0 \wedge G_0 > O$, $A_1 \wedge G_1 > O$, $G_0 \wedge G_1 = O$. 那末 $H_0 = G_0 \wedge D$ 與 $H_1 = G_1 \wedge D$ 是 $\mathfrak{B}_D$ 中的開元,並且 $A_0 \wedge H_0 = A_0 \wedge G_0 > O$, $A_1 \wedge H_1 = A_1 \wedge G_1 > O$, $H_0 \wedge H_1 \leqslant G_0 \wedge G_1 = O$. 於是 $\mathfrak{B}_D$ 也是 (T_2) 型.

設 $\mathfrak{B}$ 滿足 (T_3) 公理; 設 $A_0 > O$ 是 $\mathfrak{B}_D$ 中任意元, F_1 是 $\mathfrak{B}_D$ 中閉元, 並且 $A_0 \wedge F_1 = O$. 對於 F_1 在 $\mathfrak{B}$ 中的閉包 $\overline{F}_1$, 由於 F_1 在 $\mathfrak{B}_D$ 中閉,

$$A_0 \wedge \overline{F}_1 = (A_0 \wedge D) \wedge \overline{F}_1 = A_0 \wedge (D \wedge \overline{F}_1) = A_0 \wedge F_1 = O.$$

由於 $\mathfrak{B}$ 的正則性,存在開元 G_0, G_1,使 $A_0 \wedge G_0 > O$, $\overline{F}_1 \leqslant G_1$, $G_0 \wedge G_1 = O$. $H_0 = G_0 \wedge D$ 與 $H_1 = G_1 \wedge D$ 是 $\mathfrak{B}_D$ 中的開元, 並且 $A_0 \wedge H_0 = A_0 \wedge G_0 > O$, $F_1 = \overline{F}_1 \wedge D \leqslant G_1 \wedge D = H_1$, $H_0 \wedge H_1 = O$. 從而 $\mathfrak{B}_D$ 是正則的.

設 $\mathfrak{B}$ 滿足公理 (T_5); 設 F_0, F_1 是 $\mathfrak{B}_D$ 中兩個閉元,而

$$F_0 \wedge (\overline{F}_1 \wedge D) = O = (\overline{F}_0 \wedge D) \wedge F_1.$$

由於 $F_0 \leqslant D$, $F_1 \leqslant D$ 可知 $F_0 \wedge \overline{F}_1 = O = \overline{F}_0 \wedge F_1$. 依 (T_5) 公理在 $\mathfrak{B}$ 中存在開元 G_0, G_1,使 $F_0 \leqslant G_0$, $F_1 \leqslant G_1$,且 $G_0 \wedge G = O$. 於是 $H_0 \equiv G_0 \wedge D$ 與 $H_1 = G_1 \wedge D$ 是 $\mathfrak{B}_D$ 中開元,並且 $H_0 \geqslant F_0$, $H_1 \geqslant F_1$, $H_0 \wedge H_1 = O$,從而 $\mathfrak{B}_D$ 是全正規的.

註. 由定理 12 的系 1 不難看出,如果 D 是正規拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 的閉元,那末 $\mathfrak{B}_D$ 是正規的. 但如不設 D 是閉的,命題一般不成立(例見第二章).

定理 16. 爲了拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 是全正規的,必須且只須它的每個子拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}_D$ 是正規的.

證. 條件的必要性由定理 15 及定義 8 下的註 2 是明顯的. 反之,設每個子拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}_D$ 是正規的; 設 F_0, F_1 是 $\mathfrak{B}$ 中兩元,滿足 $F_0 \wedge \overline{F}_1 = O = F_1 \wedge \overline{F}_0$. 令 $D = c(\overline{F}_0 \wedge \overline{F}_1)$, 於是 $\overline{F}_0 \wedge D$ 與 $\overline{F}_1 \wedge D$ 是在 $\mathfrak{B}_D$ 中的閉元,並且 $(\overline{F}_0 \wedge D) \wedge (\overline{F}_1 \wedge D) = O$. $\mathfrak{B}_D$ 既是正規的,在 $\mathfrak{B}_D$ 中必存在在 $\mathfrak{B}_D$ 中開的元 G_0, G_1,使

$$\overline{F}_0 \wedge D \leqslant G_0, \quad \overline{F}_1 \wedge D \leqslant G_1, \quad G_0 \wedge G_1 = O.$$

D 既在 $\mathfrak{B}$ 中是開的, G_0, G_1 在 $\mathfrak{B}$ 中也是開的. 由於 $F_0 \wedge \overline{F}_1 = O$,可知 $F_0 \leqslant c\overline{F}_1$,從而 $F_0 \leqslant \overline{F}_0 \wedge c\overline{F}_1 = \overline{F}_0 \wedge D \leqslant G_0$. 同理 $F_1 \leqslant G_1$,於是 $\mathfrak{B}$ 的全正規性證完.

§2. 滲 透

定義 1. Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中的不空眞對偶幻(即一對偶幻, $\neq \mathfrak{B}$)叫做滲透.

例 1. 設 $\mathfrak{N}(E)$ 表示集 E 的一切子集所組成的 Boole 代數. 如果 E 是無窮集,那末 E 的一切有窮集的補集形成 $\mathfrak{N}(E)$ 中一個滲透. 特別如 $E = N$,相應的滲透叫做 Fréchet 滲透.

例 2. §1 末已指出,如果 E 是拓撲空間,任意點 x 的完全鄰域組 $\mathfrak{V}(x)$ 形成 $\mathfrak{N}(E)$ 中一個滲透.

定義 2. Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中滲透 $\mathfrak{f}_1$ 叫做比滲透 $\mathfrak{f}_2$ 粗,而 $\mathfrak{f}_2$ 比 $\mathfrak{f}_1$ 精,是

指 $\mathfrak{f}_1 \subset \mathfrak{f}_2$. 如果 $\mathfrak{f}_1 \subsetneqq \mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_2$ 叫做比 $\mathfrak{f}_1$ 眞精, $\mathfrak{f}_1$ 比 $\mathfrak{f}_2$ 眞粗.

註. 如果兩個滲透之中,有一個比另一個精,它們叫做可比的. 如果 $\mathfrak{f}_1$ 比 $\mathfrak{f}_2$ 精, $\mathfrak{f}_2$ 也比 $\mathfrak{f}_1$ 精,那末 $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2$. 設 $(\mathfrak{f}_\iota)$ $(\iota \in J)$ 是 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中的一族滲透,而 $J \neq \phi$,那末 $\bigcap_{\iota \in J} \mathfrak{f}_\iota$ 仍是一個滲透,因爲 $E \in \bigcap_{\iota \in J} \mathfrak{f}_\iota$ (E 是 $\mathfrak{B}$ 中最大元),其它性質不難看出. 如果 $\mathfrak{B}$ 中一切滲透按包含關係(也就是按精粗比較)序次,那末這些滲透成爲一個序集 Φ,並是 $\mathfrak{N}(\mathfrak{B})$ 的子序集,而 $\bigcap_{\iota \in J} \mathfrak{f}_\iota$ 正是諸 $\mathfrak{f}_\iota$ 在 Φ 中的下端. 因此 $\bigcap_{\iota \in J} \mathfrak{f}_\iota$ 叫做諸滲透 $(\mathfrak{f}_\iota)$ 的下端滲透.

定理 1. 設 $\mathfrak{G}$ 是一 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中的子集. 爲了存在一個包含 $\mathfrak{G}$ 的滲透 $\mathfrak{f}$,必須且只須對 $\mathfrak{G}$ 中任意有窮多個元 $A_1, \cdots, A_n$,必然

$$A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \neq O.$$

證. 1) 必要性. 設 $\mathfrak{f}$ 是含 $\mathfrak{G}$ 的滲透, 那末對任意有窮多個元 $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{G}$,必有 $A_1, \cdots, A_n \in \mathfrak{f}$,從而 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \in \mathfrak{f}$,於是由滲透的定義得知 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \neq \phi$.

2) 充分性. 設 $\mathfrak{G}$ 滿足定理中的條件. 令

$$\mathfrak{G}' = \{A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \mid A_i \in \mathfrak{G}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \in N\}, \tag{1}$$

又令

$$\mathfrak{G}'' = \{A \mid \exists B \in \mathfrak{G}', B \leqslant A, A \in \mathfrak{B}\}, \tag{2}$$

於是 $A \in \mathfrak{G}''$, $A_1 \geqslant A$, $A_1 \in \mathfrak{B} \Longrightarrow A_1 \in \mathfrak{G}''$, 並且由 $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ 的定義不難看出 $\mathfrak{G}''$ 中有窮多個元的交仍在 $\mathfrak{G}''$ 中. 由假設 $O \notin \mathfrak{G}$,從而 $O \notin \mathfrak{G}''$. 於是 $\mathfrak{G}''$ 便是一個含 $\mathfrak{G}$ 的滲透.

系. 設 $\mathfrak{f}$ 是 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中的滲透, $A \in \mathfrak{B}$. 爲了存在一個滲透 $\mathfrak{f}'$, 使 $\mathfrak{f}' \supset \mathfrak{f} \cup \{A\}$,必須且只須 $F \in \mathfrak{f} \Longrightarrow F \wedge A \neq O$.

註. 在定理 1 中,滲透 $\mathfrak{G}''$ 叫做由 $\mathfrak{G}$ 生成,而 $\mathfrak{G}$ 叫做 $\mathfrak{G}''$ 的母元組. 注意一般 $\mathfrak{G}'' \neq \{A \mid \exists B \in \mathfrak{G}, B \leqslant A, A \in \mathfrak{B}\}$. 爲了 $\mathfrak{G}''$ 等於上面不等式右邊的集,必須且只須 $\mathfrak{G}'$ 中每個元必 $\geqslant$ 某個在 $\mathfrak{G}$ 中的元.

定理 2. 設 $\mathfrak{G}$ 是 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中一個子集. 爲了

$$\mathfrak{G}_0 = \{A \mid \exists B \in \mathfrak{G}, B \leqslant A, A \in \mathfrak{B}\} \tag{3}$$

是滲透，必須且只須 $\mathfrak{S}$ 滿足下列兩條件：

(1) $A, B \in \mathfrak{S} \Longrightarrow \exists C \in \mathfrak{S}, C \leqslant A \wedge B$;

(2) $\mathfrak{S} \neq \phi$，並且 $O \notin \mathfrak{S}$，

換句話說，爲了上面的 $\mathfrak{S}_0$ 是滲透，必須且只須 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{B}$ 中一個非空並且不包含 O 元的按 $\geqslant$ 的定向列.

證. 必要性不待證. 充分性也不難證明.

定義 3. Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中一個非空並且不包含 O 元的按 $\geqslant$ 的定向列 $\mathfrak{S}$ 叫做滲透基，或更確切地說，叫做按定理 2 的(3)與它相應的滲透 $\mathfrak{S}_0$ 的基. 兩個滲透基叫做等價，是指它們生成同一個滲透.

註. 如果 $\mathfrak{S}$ 是滲透 $\mathfrak{f}$ 的母元組，那末(1)中的 $\mathfrak{S}'$ 就是 $\mathfrak{f}$ 的基.

注意在拓撲空間 E 中，點 x 的一個基本鄰域組就是 x 的完全鄰域組的滲透基.

定理 3. 爲了滲透 $\mathfrak{f}$ 的一個子集 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{f}$ 的基，必須且只須對於每個 $A \in \mathfrak{f}$，必存在 $B \in \mathfrak{S}$，使 $B \leqslant A$.

證. 必要性不待證. 如果定理中條件滿足，那末(3)中的 $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{f}$，從而 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{f}$ 的基.

註 1. 設 $\Delta(\succ)$ 是定向集. 令 $S(\delta) = \{\delta' | \delta' \in \Delta, \delta' \succ \delta\}$，那末 $\{S(\delta) | \delta \in \Delta\}$ 是 Boole 代數 $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{R}(\Delta)$ 中的一個滲透基，它所生長的滲透叫做 Δ 的截部滲透.

註 2. Fréchet 滲透即是定向集 N 的截部滲透.

定理 4. 設 $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0$ 各是滲透 $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_0$ 的基. 爲了 $\mathfrak{f}_0$ 比 $\mathfrak{f}$ 精，必須且只須對於每個 $A \in \mathfrak{S}, \exists A' \in \mathfrak{S}_0$，使 $A' \leqslant A$. 爲了兩滲透基 $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0$ 是等價的，必須且只須對於每個 $A \in \mathfrak{S}, \exists A' \in \mathfrak{S}_0$，使 $A' \leqslant A$，並且對於每個 $A' \in \mathfrak{S}_0, \exists A \in \mathfrak{S}$，使 $A \leqslant A'$.

證. 從略(讀者可以自己補足，作爲練習).

定理 5. 爲了 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中有窮多個滲透 $\mathfrak{f}_1, \cdots, \mathfrak{f}_n$ 在 $\mathfrak{B}$ 的一切滲透按包含關係(即精粗比較)所形成的序集 $\Phi(\mathfrak{B})$ 中具有上端，必須且只須對任意 $A_i \in \mathfrak{f}_i (1 \leqslant i \leqslant n)$，必然 $A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \neq O$. 爲了 $\mathfrak{B}$ 中一族滲透 $\{\mathfrak{f}_\iota\}$ $(\iota \in J)$ 在 $\Phi(\mathfrak{B})$ 中具上端，必須且只須對於 J 的任

意有窮子集 H, $\{\mathfrak{f}_\iota | \iota \in H\}$ 在 $\Phi(\mathfrak{B})$ 中有上端.

證. 1) 第一部分定理的條件的必要性不待證. 設滲透 $\mathfrak{f}_1, \cdots, \mathfrak{f}_n$ 滿足定理中條件,那末 $\mathfrak{f}_1 \cup \mathfrak{f}_2 \cup \cdots \cup \mathfrak{f}_n$ 按定理 1 生成一個滲透. 而這個滲透,不難看出,就是含諸 $\mathfrak{f}_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 的最小滲透.

2) 第二部分仿第一部分由定理 1 不難推出.

系. 設 $(\mathfrak{f}_\iota)$ $(\iota \in J)$ 是 $\Phi(\mathfrak{B})$ 的一個全序子集,那末依定理 5,諸 $\mathfrak{f}_\iota$ 在 $\Phi(\mathfrak{B})$ 中有上端.

定義 4. Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中極大不空真對偶幻叫做超滲透.

定理 6. 在 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中,每個滲透必含在一個超滲透中.

證. 利用定理 5 的系由 Zorn 輔理直接推出.

注意在 Boole 代數中,對偶幻 $\mathfrak{f}$ 叫做素的,是指

$$A \vee B \in \mathfrak{f} \Longrightarrow A \in \mathfrak{f} \text{ 或 } B \in \mathfrak{f}.$$

我們有下列定理.

定理 7. 爲了 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中不空真對偶幻是超滲透,必須且只須它是素對偶幻.

證. 1) 必要性. 設 $\mathfrak{f}$ 是超滲透. 姑設 $A \notin \mathfrak{f}$, $B \notin \mathfrak{f}$,但 $A \vee B \in \mathfrak{f}$. 令 $\mathfrak{G} = \{X | X \in \mathfrak{B},\ A \vee X \in \mathfrak{f}\}$,那末 $\mathfrak{G} \neq \phi$,而且 $\mathfrak{G}$ 是 $\mathfrak{B}$ 中滲透. 但 $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{f}$,而且 $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{f}$,因爲 $B \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{f}$. 這與 $\mathfrak{f}$ 的極大性矛盾.

2) 充分性. 我們可以證明更强的結果: 設 $\mathfrak{G}$ 是一個滲透的母元組,而對每個 $X \in \mathfrak{B}$,必然或者 $X \in \mathfrak{G}$ 或者 $cX \in \mathfrak{G}$. 那末 $\mathfrak{G}$ 是超滲透. 事實上,如果 $\mathfrak{f}$ 是一個滲透並且 $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{G}$,那末,如果 $X \in \mathfrak{f}$, 必然 $cX \notin \mathfrak{f}$, 從而 $cX \notin \mathfrak{G}$. 所以依假定 $X \in \mathfrak{G}$,即 $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{G}$. 於是 $\mathfrak{G}$ 的極大性證完.

系. 爲了 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中的對偶幻 $\mathfrak{f}$ 是超滲透,必須且只須它在 $\mathfrak{B}$ 中的補集 $\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{f}$ 是非空極大真幻.

證. 設 $\mathfrak{f}$ 是超滲透. 令 $\mathfrak{G} = \mathfrak{B} \setminus \mathfrak{f}$,那末 $O \in \mathfrak{G}$,從而 $\mathfrak{G} \neq \phi$. 設 $X \in \mathfrak{G}$,那末 $X \notin \mathfrak{f}$,從而 $Y \leqslant X \Longrightarrow Y \notin \mathfrak{f}$, 即 $Y \in \mathfrak{G}$. 設 $A, B \in \mathfrak{G}$, 那末依定理 7, cA, $cB \in \mathfrak{f}$,從而 $cA \wedge cB \in \mathfrak{f}$,所以

$$A \vee B = c(cA \wedge cB) \notin \mathfrak{f},$$

即 $A \vee B \in \mathfrak{G}$,從而 $\mathfrak{G}$ 是幻. 由於 $E \in \mathfrak{f}$,所以 $\mathfrak{G}$ 是真幻. 設 $A, B \in \mathfrak{B}$,

$A \wedge B = O$，那末 $CA \vee CB = E \in \mathfrak{f}$，從而依定理 7，或 $cA \in \mathfrak{f}$ 或 $cB \in \mathfrak{f}$，也就是說或 $A \in \mathfrak{G}$ 或 $B \in \mathfrak{G}$．現在設 $\mathfrak{Y}$ 是包含 $\mathfrak{G}$ 的幻，而設 $A \in \mathfrak{Y}$，那末 $cA \notin \mathfrak{Y}$，因爲否則 $A \vee cA \in \mathfrak{Y}$，即 $E \in \mathfrak{Y}$，從而 $\mathfrak{Y}$ 就不是眞幻了．因此，如果 $\mathfrak{Y}$ 是眞幻，那末 $cA \notin \mathfrak{Y}$，所以 $cA \notin \mathfrak{G}$．於是依上述，$A \in \mathfrak{Y}$，從而 $\mathfrak{Y} = \mathfrak{G}$．於是 $\mathfrak{G}$ 的極大性得證．

逆命題恰是正命題的對偶，因此不待證．

下面考察按滲透收斂的問題．

定義 5. 在拓撲備絡 $\mathfrak{B}$ 中，設 $\mathfrak{f}$ 是滲透，那末 $\bigwedge_{F \in \mathfrak{f}} \overline{F} \equiv A$ 叫做 $\mathfrak{f}$ 的附着（表示成 $A(\mathfrak{f})$）．滲透 $\mathfrak{f}$ 叫做在 $\mathfrak{B}$ 中收斂，是指在 $\mathfrak{B}$ 中存在一個原子 P，使 $\mathfrak{B}(P) \subset \mathfrak{f}$．我們表示成 $\mathfrak{f} \to P$．

註．1）設 E 是拓撲空間，(x_δ) $(\delta \in \Delta)$ 是其中定向點列，而 $\mathfrak{f} = (A_\delta)$ $(\delta \in \Delta)$ 是相應的截部滲透：

$$A_\delta = \{x_{\delta'} | \delta' \in \Delta,\ \delta' \succ \delta\}.$$

依關於定向列的理論，可知 $\mathfrak{f}$ 的附着是一個集，其中的點乃是 (x_δ) 的一切可能子定向列的極限．這時，爲了 $\mathfrak{f} \to P = \{p\}$，$p \in E$，依定義，必須且只須對於每個 $V \in \mathfrak{B}(p)$，$\exists\, \delta_0 \in \Delta$，使 $A_{\delta_0} \subset V$，也就是說 $\delta \succ \delta_0 \Longrightarrow x_\delta \in V$，即 $(x_\delta) \to p$．

2）注意一滲透的附着總是閉元．如果 A 是滲透 $\mathfrak{f}$ 的附着，對於每個滿足 $A \wedge \underline{V} > O$ 的元 V，$\underline{V} \wedge \overline{F} > O$ 對於每個 $F \in \mathfrak{f}$ 成立，從而依 §1 定理 1 的 1)，$V \wedge F > O$．這一性質在後面是有用的．注意（§1 定理 3）爲了 $A \wedge \overline{B} > O$，必須且只須 $V \in \mathfrak{B}(A) \Longrightarrow V \wedge B > O$．從而如 A 是原子 P，可知爲了 $P \leqslant \overline{B}$ 必須且只須 $V \in \mathfrak{B}(P) \Longrightarrow V \wedge B > O$．由此可知，爲了一個原子 $P \leqslant$ 一個滲透 $\mathfrak{f}$ 的附着，必須且只須 P 的每個鄰與 $\mathfrak{f}$ 中每個元相交（即其交 $> O$）．

定理 8. 爲了原子 $P \leqslant$ 滲透 $\mathfrak{f}$ 的附着，必須且只須在拓撲備 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中有一滲透 $\mathfrak{f}_0 \supset \mathfrak{f}$，使 $\mathfrak{f}_0 \to P$．

證． 令 $V \in \mathfrak{B}(P)$，那末 $V \wedge F > O (F \in \mathfrak{f})$，從而 $\{V \wedge F | V \in \mathfrak{B}(P),\ F \in \mathfrak{f}\}$ 成爲一個滲透基．設 $\mathfrak{f}_0$ 是由這個基生成的滲透，那末

$\mathfrak{f}_0 \supset \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_0 \supset \mathfrak{V}(P)$,從而 $\mathfrak{f}_0 \to P$.

反之,設存在滲透 $\mathfrak{f}_0 \supset \mathfrak{f}$, 使 $\mathfrak{f}_0 \to P$, 那末依上面的註, $P \leqslant \overline{F}_0$ 對每個 $F_0 \in \mathfrak{f}_0$ 成立,從而 $P \leqslant \bigwedge\limits_{F_0 \in \mathfrak{f}_0} \overline{F}_0 \leqslant \bigwedge\limits_{F \in \mathfrak{f}} \overline{F}$. 證完.

系 1. 爲了一個超滲透 $\mathfrak{U}$ 收斂於一個原子 P, 必須且只須 $P \leqslant \mathfrak{U}$ 的附着.

證. 因比超滲透 $\mathfrak{U}$ 更精的滲透只能 $= \mathfrak{U}$.

系 2. 對於 (T_2) 型拓撲空間 E, $\mathfrak{N}(E)$ 中一個收斂滲透的附着恰由這個滲透的極限那一個點組成.

證. 對於 (T_2) 型空間 E, 一點 x 的鄰域所成的滲透 $\mathfrak{V}(x)$ 的附着恰是單點集 $\{x\}$, 因爲對於任意點 $y \neq x$, $\exists U \in \mathfrak{V}(y)$, $V \in \mathfrak{V}(x)$, $U \cap V = \phi$, 從而依定義 5 下註 2, $y \notin \mathfrak{V}(x)$ 的附着. 如果滲透 $\mathfrak{f}$ 斂於 x, 那末 $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{V}(x)$, 從而 $\mathfrak{f}$ 的附着 $\leqslant \mathfrak{V}(x)$ 的附着 $= \{x\}$. 但依定理 8, 由於 $\mathfrak{f}$ 本身 $\supset \mathfrak{f}$, 所以 $\{x\} \leqslant \mathfrak{f}$ 的附着, 從而 $\mathfrak{f}$ 的附着 $= \{x\}$.

註. 系 2 的逆命題不成立,即如果滲透 $\mathfrak{f}$ 的附着是單點集 $\{x\}$, $\mathfrak{f}$ 並不一定斂於 x. 事實上,設 E 是散空間,並包含無窮多點. 設 $\mathfrak{f}$ 是由包含 x 並且它的補集是有窮集的那些集組成, $\mathfrak{f}$ 顯然是一個滲透,並且 E 既是散的,任意子集是閉的,從而

$$\bigcap_{F \in \mathfrak{f}} \overline{F} = \bigcap_{F \in \mathfrak{f}} F = \{x\}.$$

但 x 既有一鄰域是 $\{x\}$, 沒有一個 $F \in \mathfrak{f}$ 能够滿足 $F \subset \{x\}$, 從而 $\mathfrak{f}$ 不斂於 x!

利用滲透,也可以很方便地表達出拓撲空間的緊性的充分必要條件來.

定義 6. 拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 叫做緊的,是指由 $\mathfrak{B}$ 中任意一族滿足 $\bigvee\limits_{\iota \in J} G_\iota = E$ (E 是 $\mathfrak{B}$ 中最大元)的開元 $(G_\iota)_{\iota \in J}$, 必可選出有窮多個元 $G_{\iota_1}, \cdots, G_{\iota_n}$, 使 $\bigvee\limits_{k=1}^{n} G_{\iota_k} = E$.

註. 如果 E 是拓撲空間,而 $\mathfrak{B} = \mathfrak{N}(E)$, 那末爲了 $\mathfrak{B}$ 是緊的拓撲 Boole 代數,必須且只須 E 是緊拓撲空間.

定理 9. 爲了拓撲備 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 是緊的,必須且只須下列任何一個條件成立:

1) 對於 $\mathfrak{B}$ 中任意一族閉元 $\{F_\iota | \iota \in J\}$,如果每有窮多個 F_ι 的交 $\neq O$,那末 $\bigwedge_{\iota \in J} F_\iota \neq O$.

2) $\mathfrak{B}$ 中每個超滲透必收斂.

3) $\mathfrak{B}$ 中任意滲透 $\mathfrak{f}$ 的附着 $A(\mathfrak{f}) \neq O$.

證. 1) 與緊性的等價性由對偶性直接看出.

設 $\mathfrak{B}$ 是緊的,從而 1) 成立. 設 $\mathfrak{f}$ 是 $\mathfrak{B}$ 中任意滲透. 由滲透的定義,$\mathfrak{f}$ 中任意有窮多個元 $F_{\iota_1}, \cdots, F_{\iota_n}$ 必滿足

$$\bigwedge_{k=1}^{n} F_{\iota_k} \neq O, \text{ 從而 } \bigwedge_{k=1}^{n} \overline{F}_{\iota_k} \neq O,$$

而依 1), $\bigwedge_{\iota \in J} \overline{F}_\iota \neq O$. 於是 3) 成立.

設 3) 成立;設 $\mathfrak{f} = \{F_\iota | \iota \in J\}$ 是 $\mathfrak{B}$ 中一族閉元, 並且每有窮多個 F_ι 之交不等於 O. 依定理 1, $\mathfrak{B}$ 中有一個包含 $\mathfrak{f}$ 的滲透 $\mathfrak{f}_0$. 依假定 3), $A(\mathfrak{f}_0) \neq O$,從而

$$\bigwedge_{\iota \in J} F_\iota \geqslant \bigwedge_{F \in \mathfrak{f}} F \neq O.$$

於是 1) 成立.

現在證明 2) $\Longleftrightarrow$ 3). 設 2) 成立, 那末對於 $\mathfrak{B}$ 中任意滲透 $\mathfrak{f}$, 依 Zorn 輔理必有一超滲透 $\mathfrak{f}_0 \supset \mathfrak{f}$. 依 2), $\mathfrak{f}_0$ 收斂於一個原子 $P \in \mathfrak{B}$. 但依定理 8 系 1,

$$A(\mathfrak{f}) \equiv \bigwedge_{F \in \mathfrak{f}} F \geqslant \bigwedge_{F \in \mathfrak{f}_0} F \geqslant P,$$

從而 $A(\mathfrak{f}) > O$.

反之,設 3) 成立,那末 $\mathfrak{B}$ 中任意超滲透 $\mathfrak{f}$ 的附着 $A(\mathfrak{f}) \neq O$. 依定理 8 系 1, $\mathfrak{f}$ 收斂.

定理 10. 設 $\mathfrak{f}$ 是緊拓撲備 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中一個滲透,而設 $A = A(\mathfrak{f})$,那末 A 的每個鄰域 V 必 $\geqslant \mathfrak{f}$ 中一元.

證. 設 $V \in \mathfrak{V}(A)$, 從而 $\underline{V} \geqslant A$. 如果 V 與每個 $F \in \mathfrak{f}$ 滿足關係

$F \wedge cV \neq O$, 依定理5, $\mathfrak{B}$ 中有一滲透 $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{f}$, $\supset \mathfrak{V}(A)$. 於是依定理9的3), $A(\mathfrak{G}) \neq O$,從而

$$A(\mathfrak{f}) \supset A(\mathfrak{G}) > O.$$

但

$$A(\mathfrak{G}) = \bigwedge_{G \in \mathfrak{G}} G = \bigwedge_{\substack{F \in \mathfrak{f} \\ V \in \mathfrak{V}(A)}} (F \wedge cV) \leqslant cV,$$

所以

$$A(\mathfrak{G}) \leqslant cV \wedge A(\mathfrak{f}) \equiv cV \wedge A = O.$$

因爲 $V \geqslant \underline{V} \geqslant A$, 所以導出矛盾. 從而必存在一個 $F \in \mathfrak{f}$, 滿足 $F \wedge cV = O$,即 $F \leqslant V$.

系. 在緊 (T_2) 型拓撲備 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中,爲了滲透 $\mathfrak{f}$ 收斂,必須且只須 $\mathfrak{f}$ 的附着 $A(\mathfrak{f})$ 是原子的.

註. 比較定理8系2下的註!

證. 必要性一般是成立的,見定理8系2. 反之設 $A(\mathfrak{f})$ 是原子的, $A(\mathfrak{f}) = P$. 依定理10, P 的每個鄰域必 $\geqslant \mathfrak{f}$ 中一元, 這就是說 $\mathfrak{V}(P) \subset \mathfrak{f}$. 依定義, $\mathfrak{f} \to P$. 證完.

定理 11. 緊 (T_1) 型拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 必是原子的.

證. 1) 首先證明在緊 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中,每個閉元 $F > O$ 必含一極小閉元 $P > O$, 也就是說在 $\mathfrak{B}$ 的一切 $> O$ 的閉元所組成的序集 $\mathfrak{W}$ 中有極小的. 事實上,依 Zorn 輔理在 $\mathfrak{B}$ 中有一含 F 的超滲透 $\mathfrak{f}$. 依定理9的3), $A(\mathfrak{f}) \neq O$. 令 $A = A(\mathfrak{f})$,那末

$$A = \bigwedge_{H \in \mathfrak{f}} \overline{H} \leqslant \bigwedge_{H \in \mathfrak{f} \cap \mathfrak{W}} \overline{H} = \bigwedge_{H \in \mathfrak{f} \cap \mathfrak{W}} H,$$

也就是說,閉元 $A \leqslant H$ 對於一切 $H \in \mathfrak{f} \cap \mathfrak{W}$ 成立. 如果 A 不是 $\mathfrak{W}$ 中的極小元, 必存在 $\mathfrak{B}$ 中閉元 Q, 使 $O < Q < A$. 於是 $\mathfrak{f} \cup \{Q\}$ 形成 $\mathfrak{B}$ 中一個滲透基, 它所生成的滲透只能是 $\mathfrak{f}$, 因爲 $\mathfrak{f}$ 是超滲透. 但於是 $Q \in \mathfrak{f} \cap \mathfrak{W}$,從而 $A \leqslant Q$, 與上面矛盾. A 的極小性得證,並且 $A \leqslant H$ 對於一切 $H \in \mathfrak{f} \cap \mathfrak{W}$ 成立.

2) 現在設 $\mathfrak{B}$ 是緊 (T_1) 型拓撲 Boole 代數, 今證每個極小閉元 $P > O$ 必是原子. 否則必存在 $Q \in \mathfrak{B}$, $O < Q < P$,而依定理6,必存

在閉元 R,使 $O \leqslant R \leqslant P \wedge cQ$ (因 $P \wedge cQ = O \Longrightarrow P \leqslant Q$), 從而 $O < R < P$. 因 $P \wedge cQ = P \Longrightarrow P \leqslant cQ \Longrightarrow Q = P \wedge Q = O$. 這與$P$的極小性矛盾. 所以結合 1) 部分已證得 $\mathfrak{B}$ 中每個閉元 $F > O$ 必含一原子. 這正是說, $\mathfrak{B}$ 是原子的!

§3. 連續映像與連續函數

連續映像也可以不藉點來處理. 這在第一章中也曾部分涉及. 這裏簡述一下.

定義 1. 由拓撲序集 $\mathfrak{B}$ 到拓撲序集 $\mathfrak{B}'$ 上的同態[1] Φ 叫做連續,是指 $A, B \in \mathfrak{B}$, $A \leqslant \overline{B} \Longrightarrow \Phi A \leqslant \overline{\Phi B}$.

定理 1. 爲了由拓撲序集 $\mathfrak{B}$ 到拓撲序集 $\mathfrak{B}'$ 上的同態 Φ 是連續的, 必須且只須對於每個 $A \in \mathfrak{B}$, $\Phi\overline{A} \leqslant \overline{\Phi A}$.

證. 1) 設定理中條件滿足, 而 $A, B \in \mathfrak{B}$, $A \leqslant \overline{B}$, 那末 $\Phi A \leqslant \leqslant \Phi\overline{B}$, 所以 $\Phi A \leqslant \overline{\Phi B}$. 這正是說 Φ 連續.

2) 反之,設 Φ 連續,而 $A \in \mathfrak{B}$,那末 $\overline{A} \leqslant \overline{A}$, 所以 $\Phi\overline{A} \leqslant \overline{\Phi A}$.

定理 2. 如果在定理 1 中 Φ 是可逆[2] 的, 那末爲了 Φ 是連續的,必須且只須對於 $\mathfrak{B}'$ 中每個閉元 F', $\overset{-1}{\Phi} F' \equiv F$ 在 $\mathfrak{B}$ 中是閉元.

證. 1) 設定理中條件滿足;設 $A, B \in \mathfrak{B}$, $A \leqslant \overline{B}$, 那末 $F' = \overline{\Phi B}$ 是閉元. 從而依假定, $F \equiv \overset{-1}{\Phi} F'$ 是閉元. 既然 $\Phi B \leqslant F'$,所以依 $\overset{-1}{\Phi}$ 的定義 $B \leqslant F$. 於是 $\overline{B} \leqslant \overline{F} = F$,從而由 $A \leqslant \overline{B}$ 知 $A \leqslant \overline{F}$. 於是 $\Phi A \leqslant \Phi F \leqslant F' = \overline{\Phi B}$,即依定義 Φ 連續.

2) 反之, 設 Φ 連續, 設 F' 爲 $\mathfrak{B}'$ 中閉元. 令 $\overset{-1}{\Phi} F' = F$. 因爲 $\overline{F} \leqslant \overline{F}$,所以 $\Phi\overline{F} \leqslant \overline{\Phi F}$, 但 $\Phi F \leqslant F'$, 而且 $\overline{F'} = F'$, 所以 $\Phi\overline{F} \leqslant F'$. 而依 $\overset{-1}{\Phi}$ 之定義, $\overline{F} \leqslant \overset{-1}{\Phi} F' = F$,即 F 是閉元.

---

1) 由序集 $\mathfrak{B}$ 到序集 $\mathfrak{B}'$ 上的同態 Φ 是指 Φ 是由 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}'$ 上的映像,滿足 $\Phi(A \wedge B) = = \Phi(A) \wedge \Phi(B)$, $\Phi(A \vee B) = \Phi(A) \vee \Phi(B)$, $A, B \in \mathfrak{B}$.

2) 同態 Φ 是可逆的,是指對於任意 $A' \in \mathfrak{B}'$, $\bigvee_{A \in \mathfrak{B}_0} A$ 必存在,其中 $\mathfrak{B}_0 = \{A \mid \Phi(A) = = A'\}$. 並界定 Φ 的逆映像 $\overset{-1}{\Phi}$ 爲: $\overset{-1}{\Phi}(A') = \bigvee_{A \in \mathfrak{B}_0} A$.

定理 3. 設 $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ 是兩個拓撲 Boole 代數，Φ 是由 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}'$ 上的備[1] 同態，那末爲了 Φ 連續，必須且只須對每個開元 $G' \in \mathfrak{B}'$, $\overset{-1}{\Phi} G' \equiv G$ 是開元.

證. 設 F', G' 是 $\mathfrak{B}'$ 中兩元，而 F' 與 G' 在 $\mathfrak{B}'$ 互補，那末 $\overset{-1}{\Phi} F' = F$ 與 $\overset{-1}{\Phi} G' = G$ 也是互補的. 因此，爲了 G 是開元，必須且只須 F 是閉元，從而依定理 2，即可證完.

定理 4. 設 $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ 是拓撲 Boole 代數，Φ 是由 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}'$ 上的備同態，那末爲了 Φ 是連續的，必須且只須對於每個 $A \in \mathfrak{B}$ 及 ΦA 在 $\mathfrak{B}'$ 中的每個鄰 U'，必存在 A 在 $\mathfrak{B}$ 中的鄰 U，使 $\Phi U \leqslant U'$.

證. 設定理中的條件成立；設 U' 是 $\mathfrak{B}'$ 中開元. 令 $A = \overset{-1}{\Phi} U'$. 既然 $\Phi A \leqslant U'$，所以 U' 爲 $A' \equiv \Phi A$ 的鄰. 依假定存在 A 在 $\mathfrak{B}$ 中的鄰 U，使 $\Phi U \leqslant U'$，於是 $U \leqslant \overset{-1}{\Phi} U' = A$. 但依鄰的定義，$A \leqslant \underline{U} \leqslant U$，從而 $U = A = \underline{U}$，即 A 是開元. 依定理 3，Φ 是連續的.

反之，設 Φ 是連續的，$A \in \mathfrak{B}$, $U' \in \mathfrak{B}(A')$, U' 是開元，$A' = \Phi A$. 依定理 3，$U = \overset{-1}{\Phi} U'$ 是開元. 由 $A' \leqslant U'$ 可知 $A \leqslant U$. 又 $\Phi U \leqslant U'$，從而定理中的條件成立.

定理 5. 爲了由拓撲空間 E 到拓撲空間 E_1 中的映像 f 是連續的，必須且只須對於每個點 $a \in E$ 及 $\mathfrak{N}(E)$ 中每個斂於 a 的滲透 $\mathfrak{f}$, $f(\mathfrak{f})$ 是一個滲透基，並斂於 $f(a)$.

證. 設 f 是連續映像，顯然 $f(\mathfrak{f})$ 是滲透基. 設 $\mathfrak{f}$ 是 $\mathfrak{N}(E)$ 中斂於 a 的滲透. 取 $U' \in \mathfrak{B}(f(a))$，那末依定理 4，$\exists U \in \mathfrak{B}(a)$，使 $f(U) \subset U'$. 既然 $\mathfrak{f} \to a$, $\exists F \in \mathfrak{f}$，使 $F \subset U$. 從而 $f(F) \subset f(U) \subset U'$，這就是說 $f(\mathfrak{f}) \to f(a)$.

反之，設 f 滿足定理中的條件. 對於任意 $a \in E$, a 的完全鄰域組是一個斂於 a 的滲透，從而依條件，$f(\mathfrak{B}(a))$ 斂於 $f(a)$. 於是對於每個

1) 同態 Φ 叫做備的，是指對任意 $A_\iota (\iota \in J) \in \mathfrak{B}$, $\bigvee_{\iota \in J} A_\iota$, $\bigwedge_{\iota \in J} A_\iota$ 都存在，並且

$$\Phi\left(\bigvee_{\iota \in J} A_\iota\right) = \bigvee_{\iota \in J} \Phi A_\iota, \quad \Phi\left(\bigwedge_{\iota \in J} A_\iota\right) = \bigwedge_{\iota \in J} \Phi A_\iota.$$

$U' \in \mathfrak{B}(f(a))$, $\exists U \in \mathfrak{B}(a)$, 使 $f(U) \subset U'$. 依定理 4 [或第一章 § 2] f 是連續的.

我們也可以不用點來討論連續函數. 爲此我們引入下列概念.

定義 2. 拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中的開元族 $(G_\lambda)\left(\lambda = \frac{k}{2^n}, 0 \leqslant k \leqslant 2^n, n = 1, 2, \cdots\right)$ 叫做二進標度, 是指對於任意兩個如上的 λ 值 λ', λ'', $\lambda' < \lambda''$, 必然 $\overline{G}_{\lambda'} \leqslant G_{\lambda''}$.

註. 設 E 是拓撲空間, 而 (G_λ) 是 $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{R}(E)$ 中的二進標度, 仿第二章 § 1 的方法, 令

$$f(x) = \inf\{\lambda \mid G_\lambda \ni x\},$$

$f(x)$ 就是 E 上一個連續函數. 反之, 如果 $f(x)$ 是 E 上連續函數, 那末令

$$G_\lambda = \{x \mid x \in E, f(x) < \lambda\},$$

$\{G_\lambda\}$ 形成一個二進標度. 因此, 在一般拓撲 Boole 代數的理論中, 二進標度起着平常拓撲空間中連續函數的作用. 於是全正則性也可以引入到拓撲 Boole 代數中去.

定義 3. 拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 叫做全正則, 是指它滿足下列公理:

公理 T_{3a}. 設 $A_0 > O$ 與 F_1 是 $\mathfrak{B}$ 中兩元, F_1 是閉的, $A_0 \wedge F_1 = O$, 那末必存在一個二進標度 (G_λ), 使 $A_0 \wedge G_0 > O$, $F_1 \wedge G_1 = O$.

註. 設 E 是 (T_0) 型空間, $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}(E)$; 設 $x_0 \in E$, F_1 是一個不含 x_0 的閉集, 那末令 $A_0 = \{x_0\}$, 並令 $\lambda > 1 \Longrightarrow G_\lambda = E$. 公理 T_{3a} 意味着存在 E 上連續函數 $f(x)$, 使 $f(x_0) = 0$, $x \in F_1 \Longrightarrow f(x) = 1$, 從而 E 是全正則空間. 反之, 設 E 是全正則空間, A_0 是任意集, F_1 是閉集, 而 $A_0 \cap F_1 = \phi$. 於是存在 $x_0 \in A_0$, $x_0 \notin F_1$, 從而存在 E 上連續函數 $f(x)$, 使 $x \in E \Longrightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 而 $f(x_0) = 0$, $f(x) = 1\ (x \in F_1)$. 從而 $F_1 \cap G_1 = \phi$, $x_0 \in G_0$, 也就是說 $A_0 \cap G_0 \neq \phi$. 這證明了 $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}(E)$ 是全正則的.

定理 6. 設 $\mathfrak{B}$ 是拓撲 Boole 代數. 如果 $\mathfrak{B}$ 是全正則的, 那末 $\mathfrak{B}$ 是正則的. 如果 $\mathfrak{B}$ 是 (T_1) 型並且正規的, 那末 $\mathfrak{B}$ 是全正則的.

證. 1) 設 $\mathfrak{B}$ 是全正則的;設 $A_0 > O$ 與 F_1 是 $\mathfrak{B}$ 中兩元,F_1 是閉元,$A_0 \wedge F_1 = O$. 依公理 T_{3a},存在二進標度 (G_λ),使 $A_0 \wedge G_0 > O$, $F_1 \wedge G_1 = O$. 令 $O_0 = G_0$, $O_1 = c\overline{G}_0$, 那末 O_0, O_1 是開元. 又 $A_0 \wedge O_0 > O$, 而因 $F_1 \wedge G_1 = O$, $F_1 \leqslant cG_1 \leqslant c\overline{G}_0 = O_1$. 又 $O_0 \wedge \wedge O_1 = O$,因爲 $G_0 \wedge c\overline{G}_0 \leqslant \overline{G}_0 \wedge c\overline{G}_0 = O$. 這說明 $\mathfrak{B}$ 是正則的.

2) 設 $\mathfrak{B}$ 是 (T_1) 型且正規的;設 $A_0 > O$, F_1 是閉元, $A_0 \wedge F_1 = O$. 依 §1 定理 6,存在開元 F_0,使 $O < F_0 \leqslant A_0$. 於是 $F_0 \wedge F_1 = O$. 令 $G_1 = cF_1$, 於是 G_1 是開元並且 $F_1 \wedge G_1 = O$, $F_0 \leqslant G_1$. 由於 $\mathfrak{B}$ 的正規性,依定理 11,存在開元 G_0,使 $F_0 \leqslant G_0 \leqslant \overline{G}_0 \leqslant G_1$. 反覆使用定理 11,可以對每個二進分數 $\lambda = \dfrac{k}{2^n}$ $(0 \leqslant k \leqslant 2^n,\ n = 1, 2, \cdots)$ 作出一開元 G_λ, 使 $0 \leqslant \lambda' < \lambda'' \leqslant 1 \Longrightarrow \overline{G}_{\lambda'} \leqslant G_{\lambda''}$. 於是 (G_λ) 是一二進標度,滿足 $A_0 \wedge G_0 \geqslant F_0 > O$, $F_1 \wedge G_1 = O$. 所以 $\mathfrak{B}$ 是全正則的.

定理 7. 對於全正則拓撲 Boole 代數 $\mathfrak{B}$ 中任意元 D, $\mathfrak{B}_D$ 是全正則的.

證. 設 $A_0 > O$ 和 F_1 是 $\mathfrak{B}_D$ 中兩元,並且 F_1 是 $\mathfrak{B}_D$ 中閉元,而 $A_0 \wedge F_1 = O$. 由於 F_1 在 $\mathfrak{B}_D$ 中閉,因此 $F_1 = \overline{F}_1 \wedge D$;又因 $A_0 \leqslant D$, 所以依假定 $A_0 \wedge \overline{F}_1 = (A_0 \wedge D) \wedge \overline{F}_1 = A_0 \wedge F_1 = O$. 依公理 T_{3a}, 存在 $\mathfrak{B}$ 中一個二進標度 (H_λ), 使 $A_0 \wedge H_0 > O$, $\overline{F}_1 \wedge H_1 = O$. 令 $G_\lambda = H_\lambda \wedge D$,那末 (G_λ) 是 $\mathfrak{B}_D$ 中一個二進標度, 使 $A_0 \wedge G_0 > O$, $F_1 \wedge G_1 = O$. $\mathfrak{B}_D$ 的全正則性得證.

第五章　一致性結構與距離空間

§1.　距，距離與複距離，一致性結構

定義 1. 設E是一個集，由 $E \times E$ 到廣數直綫 $\overline{R}$ 上的集 $[0,+\infty]$ 中的映像 $\rho(x, y)$ 叫做E上的距，是指

1) $x \in E \Longrightarrow \rho(x, x) = 0$;

2) $x, y \in E \Longrightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$（對稱性）;

3) $x, y, z \in E \Longrightarrow \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$（三角不等式）.

特別，如果 $\rho(x, y)$ 只在R中取值，它叫做擬距離. 擬距離 $\rho(x, y)$ 叫做距離，是指 $\rho(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

例. 1) 在數直綫 R 上，令 $\rho(x, y) = |x - y|$, 就得到 R 上一個距離. 同理，在 $\overline{R}$ 上，$\rho(x, y) = |x - y|$是距.

2) 設E是一集，$g(x)$ 是由E到R中的映像，那末

$$\rho(x, y) = |g(x) - g(y)| \quad (x, y \in E)$$

是E上一個擬距離.

3) 設L表示$[0, 1]$上一切按 Lebesgue 可積分函數的全體，那末

$$\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt \quad (x(t), y(t) \in L)$$

是L上的擬距離.

4) 設E是任意集. 令

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{如 } x = y, \\ 1 & \text{如 } x \neq y, \end{cases} \quad (x, y) \in E$$

那末 $\rho(x, y)$ 是E上的距離. 如在上式中把 1 換成 $+\infty$, $\rho(x, y)$ 是E上的距. 如果在上式中把相等關係換成E中任何（按代數意義的）等價關係，$\rho(x, y)$ 是擬距離. 如果把上式中的 1 換成任意正數 a, 也有類似的性質.

定義 2. 設集E上有一距族$P=\{\rho_\iota | \iota\in J\}$. 所謂由距族$P$在$E$上決定的拓撲結構,是指由下列鄰域決定的拓撲結構: 對於$x_0\in E$,令

$$V(x_0;\iota_1,\cdots,\iota_n;\varepsilon)=$$
$$=\{y\,|\,\rho_{\iota_k}(x_0,y)<\varepsilon,\ 1\leqslant k\leqslant n,\ \iota_k\in J,\ y\in E\},$$

這裏$\varepsilon>0$是任意數,n是任意自然數,使$\mathfrak{U}(x_0)$爲一切形如上述的集的全體,並取$\mathfrak{U}$作x_0的基本鄰域組.

註. 1) 我們證明上述的集確能形成x_0的基本鄰域組. 不難看出,如果取$\delta=\min(\varepsilon,\eta)$ $(\varepsilon>0,\eta>0)$,

$$V(x_0;\iota_1,\cdots,\iota_n;\varepsilon)\cap V(x_0;\iota_{n+1},\cdots,\iota_{n+m};\eta)\supset$$
$$\supset V(x_0;\iota_1,\cdots,\iota_n,\cdots,\iota_{n+m};\delta).$$

又如$y\in V(x_0;\iota_1,\cdots,\iota_n;\varepsilon)$,那末

$$\rho_{\iota_k}(x_0,y)<\varepsilon\ (1\leqslant k\leqslant n).$$

令

$$\delta=\min_{1\leqslant k\leqslant r}(\varepsilon-\rho_{\iota_k}(x_0,y)),$$

不難看出(利用三角不等式),

$$V(y;\iota_1,\cdots,\iota_n;\delta)\subset V(x_0;\iota_1,\cdots,\iota_n;\varepsilon).$$

2) 特別,如果P只由一個距ρ組成,P在E上決定一個拓撲結構,使$x_0(\in E)$的一個基本鄰域組由下列集族組成:

$$\mathfrak{U}(x_0)\equiv\{V(x_0;\varepsilon)\,|\,\varepsilon>0\},$$

這裏$V(x_0;\varepsilon)\equiv\{y\,|\,\rho(x_0,y)<\varepsilon,\ y\in E\}$. $V_\varepsilon(x_0)$叫做以x_0爲中心以$\varepsilon>0$爲半徑的ρ-球(如果在討論中沒有區分必要時,簡稱爲球),由$S_\rho(x_0;\varepsilon)$或$S(x_0;\varepsilon)$表示.

3) 爲了由距組$P=\{\rho_\iota|\iota\in J\}$所決定的拓撲結構$\mathfrak{r}_P$是$(T_2)$型的,必須且只須$\rho_\iota(x,y)=0$(對一切$\iota\in J$成立)$\Longrightarrow x=y$. 事實上,爲了拓撲結構$\mathfrak{r}_P$是$(T_2)$型的,必須且只須對於$E$中任意兩個不同的點$x,y$,必存在標號$\iota_1,\cdots,\iota_n,K_1,\cdots,K_m\in J$,使

$$V(x;\iota_1,\cdots,\iota_n;\varepsilon)\cap V(y;K_1,\cdots,K_m;\eta)=\phi,$$

這裏$\varepsilon>0$, $\eta>0$. 所以這時

$$V(x;\iota_1,\cdots,\iota_n;\varepsilon)\not\ni y$$

即至少有一自然數 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$，使 $\rho_{\iota_k}(x, y) \geqslant \varepsilon$，即 $\rho_{\iota_k}(x, y) \neq 0$。反之，設有一 $\rho_{\iota_0}(x, y) \neq 0$，那末令正數 ε 滿足 $0 < \varepsilon < \rho_{\iota_0}(x, y)$，於是

$$V\left(x; \iota_0; \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap V\left(y; \iota_0; \frac{\varepsilon}{2}\right) = \phi.$$

使 $\mathfrak{x}_P$ 為 (T_2) 型的距族 P 叫做分離族。特別，為了由一個擬距離 ρ 決定的拓撲結構是 (T_2) 型的，必須且只須 ρ 是距離。

4) 設 $\{\mathfrak{R}_\iota | \iota \in J\}$ 是集 E 上一族等價關係，ρ_ι 表示按定義 1 下例 4 的方式所決定的距：

$$\rho_\iota(x, y) = \begin{cases} \varepsilon_\iota & \text{如果 } x \not\equiv y \ (\mathfrak{R}_\iota), \\ 0 & \text{如果 } x \equiv y \ (\mathfrak{R}_\iota). \end{cases} \quad (\varepsilon_\iota > 0)$$

由 $P = \{\rho_\iota | \iota \in J\}$ 在 E 上決定的拓撲結構 $\mathfrak{x}_P$ 叫做由等價關係族 $\{\mathfrak{R}_\iota\}$ 決定的拓撲結構。這樣決定的拓撲結構並不是少見的。下面將看到這類的有趣例。

定理 1. 為了拓撲空間 E 的拓撲結構 $\mathfrak{x}$ 可以由一個分離的擬距離族 $P = \{\rho_\iota | \iota \in J\}$ 決定，必須且只須 E 是全正則空間。

證．1) 充分性。設 E 是全正則空間，由第二章 §3 的定理，存在一族 E 上的連續函數 $\{f_\iota | \iota \in J\}$，使 $f_\iota(E) \subset [0, 1]$ $(\iota \in J)$，而 $\{f_\iota\}$ 決定 E 上的拓撲結構。令

$$\rho_\iota(x, y) = |f_\iota(x) - f_\iota(y)| \quad (x, y \in E, \iota \in J).$$

由 E 的全正則性可知 $\{\rho_\iota\}$ 是分離擬距離族。對於每個點 $x_0 \in E$ 及 $V \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{x}}(x_0)$，存在一個 $f_{\iota_0}(\iota_0 \in J)$，使 $f_{\iota_0}(x_0) = 1$，而 $x \notin V \Longrightarrow f_{\iota_0}(x) = 0$，從而

$$V(x_0; \iota_0; 1) \equiv \{x \,|\, |f_{\iota_0}(x) - f_{\iota_0}(x_0)| < 1, x \in E\} \subset V,$$

即 $\mathfrak{x}_P \succ \mathfrak{x}$。但取任意有窮多個 $f_{\iota_k}(\iota_k \in J, 1 \leqslant k \leqslant n)$，既然它們都是 E 上按 $\mathfrak{x}$ 的連續函數，

$$V(x_0; \iota_1, \cdots, \iota_n; \varepsilon) = \{x \,|\, |f_{\iota_k}(x) - f_{\iota_k}(x_0)| < \varepsilon, 1 \leqslant k \leqslant n\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} \{x \,|\, f_{\iota_k}(x_0) - \varepsilon < f_{\iota_k}(x) < f_{\iota_k}(x_0) + \varepsilon\} =$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} \overset{-1}{f}_{\iota_k}(]f_{\iota_k}(x_0) - \varepsilon, f_{\iota_k}(x_0) + \varepsilon[)$$

是E中含x_0的開集,從而存在$V \in \mathfrak{V}_{\mathfrak{x}}(x_0)$,使

$$V \subset V(x_0; \iota_1, \cdots, \iota_n; \varepsilon),$$

即$\mathfrak{x} \succ \mathfrak{x}_P$. 充分性證完.

2) 必要性. 設E的拓撲結構$\mathfrak{x}$由一分離擬距離族$P=\{\rho_\iota \mid \iota \in J\}$決定,$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_P$. 依定義1下的註3,$\mathfrak{x}_P$是$(T_2)$型的. 取$x_0 \in E$及$V \in \mathfrak{V}(x_0)$,必存在$\iota_k \in J$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$及$\varepsilon > 0$,使

$$V(x_0; \iota_1, \cdots, \iota_n; \varepsilon) \subset V.$$

令$f_\iota(y) \equiv \rho_\iota(x_0, y)$ $(\iota \in J, y \in E)$,既然由三角不等式有

$$|f_\iota(y) - f_\iota(z)| = |\rho_\iota(x_0, y) - \rho_\iota(x_0, z)| \leqslant \rho_\iota(y, z),$$

從而

$$z \in V(y; \iota; \varepsilon) \Longrightarrow |f_\iota(y) - f_\iota(z)| < \varepsilon,$$

即每個f_ι是E上連續函數. 令

$$f(y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\min\left(\frac{f_{\iota_k}(y)}{\varepsilon}, 1\right)\right).$$

於是$f(y)$是E上連續函數,$0 \leqslant f(y) \leqslant 1$ $(y \in E)$,並且

$$f(x_0) = 0, x \notin V \Longrightarrow f(x) = 1.$$

從而E是全正則的. 證完.

拓撲結構由一個距離決定的拓撲空間具有最簡單的性質,而且最類似平常的空間R, R^2, R^3等等. 但一般拓撲空間的拓撲結構不一定能由一個距離決定,即使他是全正則的空間. 我們將在下面舉例並找出它可以由一個距離決定的必要充分條件. 但距離的作用主要是表達兩點的遠近,也就是用一個數的"大,小"來表達這兩點的遠近. 我們可以用更一般的能"比較大小"的量來表達這種遠近,即可以用滿足一定條件但非常一般的序集來表達(Fréchet[2], Kurepa[3], Colmez[1]等). 這裏我們不作這樣最一般的考察,而結合上述,由一個特殊的序集來表現"距離".

定義 3. 由集$E \times E$到半序羣R^I中的映像$\sigma(x, y)$叫做E上的複擬距離,是指

1) $x, y \in E \Longrightarrow \sigma(x, y) \geqslant \Theta$, $\sigma(x, x) = \Theta$;

2) $x, y \in E \Longrightarrow \sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ (對稱性);

3) $x, y, z \in E \Longrightarrow \sigma(x, y) \leqslant \sigma(x, z) + \sigma(z, y)$ (三角形不等式).

複擬距離 $\sigma(x, y)$ 叫做複距離,是指它滿足條件

4) $\sigma(x, y) = \Theta \Longrightarrow x = y$.

賦有複擬距離或複距離的集叫做複擬距離空間或複距離空間.

註. 1) 設 $\overline{R}$ 表示廣數直綫. 令 Δ 表示 $\overline{R}^J$ 中一切如下的元 δ 的全體: $\delta = (z_\iota)_{\iota\in J}$, 其中有窮多個 $z_\iota \in [0, +\infty[$, 其餘 $z_\iota = +\infty$. Δ 按 $\overline{R}^J$ 所誘導出來的次序成爲按 $\leqslant$ 的定向集: 對於每兩個元 δ_1, $\delta_2 \in \Delta$, 必存在 $\delta_0 \in \Delta$, 使 $\delta_0 \leqslant \delta_1$, $\delta_0 \leqslant \delta_2$. 於是對於 $\delta \in \Delta$,

$$\sigma(x, y) \prec \delta \Longleftrightarrow \begin{cases} \sigma_\iota(x, y) \leqslant z_\iota & \text{如果 } z_\iota < +\infty, \\ \sigma_\iota(x, y) \text{ 任意} & \text{如果 } z_\iota = +\infty, \end{cases}$$

這裏 $\sigma(x, y) = (\sigma_\iota(x, y))_{\iota\in J}$, $\delta = (z_\iota)$ $(\iota \in J)$. 如果在 $\delta = (z_\iota)$ 中, $z_{\iota_1}, \cdots, z_{\iota_n} \in R$, 而 $z_\iota = +\infty$ $(\iota \neq \iota_1, \cdots, \iota_n)$, 那末

$$S(x_0; \delta) \equiv \{x \mid \sigma(x, x_0) \prec \delta\} = \overline{V}(x_0; \iota_1, \cdots, \iota_n; z_1, \cdots, z_n), \quad (1)$$

這裏

$$\overline{V}(x_0; \iota_1, \cdots, \iota_n; z_1, \cdots, z_n) = \{x \mid \sigma_{\iota_k}(x, x_0) \leqslant z_{\iota_k}, 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

又由定義 3 1), 2), 3) 可知 $\{\sigma_\iota \mid \iota \in J\}$ 是一個擬距離族,而爲了它是分離的,必須且只須 σ 滿足 4). 由 1)不難看出,對於由擬距離族 $\{\sigma_\iota \mid \iota \in J\}$ 決定的拓樸結構, $\{S(x_0; \delta) \mid \delta \in \Delta\}$ 成爲 x_0 的一個基本鄰域組. 這個拓樸結構也叫做由複(擬)距離 σ 決定的, 表示成 $\mathfrak{t}(\sigma, \Delta)$, 而相應的拓樸空間表示成 $E(\sigma, \Delta)$. 如果對於 $\delta \in \Delta$, 集 $A \subset E$ 中任意兩點 x, y 滿足 $\sigma(x, y) \prec \delta'$, 我們說"$A$ 的 σ-直徑小於 δ".

2) 複距離空間(距離空間)的子空間 A 仍是複距離(距離)空間. 子空間上的複距離(距離)即原來空間上的複距離(距離)限制在 $A \times A$ 上而得的函數.

3) 在複距離空間 E 中, 任意點的基本鄰域組的"序型"是相同的. 事實上, x_0 的一個基本鄰域組 $\{S(x_0; \delta) \mid \delta \in \Delta\}$, Δ 與 x_0 無關. 這時, 爲了 $x \in \overline{A} \subset E$(或 $x \in A' \subset E$), 必須且只須在 A 中(在 $A \setminus \{x\}$ 中)可取

出一個序型與 $\varDelta$ 相似(即序反向)的定向列 $(x_\delta)_{\delta\in\varDelta}$ 來,使 $x_\delta\to x_0$.

證. 條件的充分性不待證,而如果 $x_0\in\bar{A}$,那末,對於每個 $\delta\in\varDelta$,存在 $x_\delta\in A$,使 $x_\delta\in S(x_0;\delta)$,即 $\sigma(x_0,x_\delta)\prec\delta$. 於是對於每個 $\delta_0\in\varDelta$,

$$\delta\leqslant\delta_0\Longrightarrow\sigma(x_0,x_\delta)\prec\delta\leqslant\delta_0,$$

所以 $x_\delta\in S(x_0;\delta_0)$,這正是說,$x_\delta\to x_0$. 因此,在考察複距離空間中的拓撲問題時,只須考察序型與 $\varDelta$ 逆相似的定向點列. 特別是距離空間中,

$$\left\{S\left(x_0;\frac{1}{n}\right)\middle| n\in N\right\}$$

是 x_0 的一個基本鄰域組,從而只須考察平常點列就够了. 距離空間的簡單性的一個原因就在這點.

4) 任意全正則空間可以看成複距離空間. 只須依定理 1 取它的一個足以決定其拓撲結構的分離擬距離族,$P=\{\rho_\iota|\iota\in J\}$,而令

$$\sigma(x,y)=(\rho_\iota(x,y))_{\iota\in J}.$$

例. 考察 $[0,1]$ 上一切實值函數的全體 $\mathfrak{f}[0,1]$. 對於 $x\equiv x(t)$ 及 $y\equiv y(t)\in\mathfrak{f}$,令

$$\sigma(x,y)=(|x(t)-y(t)|)_{0\leqslant t\leqslant 1},$$

於是 $\sigma(x,y)$ 是 $\mathfrak{f}$ 上一個複距離. 按這個複距離所決定的拓撲結構,為了 $(x_\delta)\to x_0$,必須且只須 $(x_\delta(t))\to x_0(t)$ 對每個 $t\in[0,1]$ 成立,也就是說,指函數列 $(x_\delta(t))\to x_0(t)$ 的"點點收斂".

定義 4. 由複距離空間 $E(\sigma,\varDelta)$ 到複距離空間 $E'(\sigma',\varDelta')$ 中的映像 f 叫做一致連續,是指對於每個 $\delta'\in\varDelta'$ (E 的尺度) ($\delta'\neq\Theta$),必可找到 $\delta\in\varDelta$ (E 的尺度) ($\delta\neq\Theta$),使

$$\sigma(x,y)\prec\delta\Longrightarrow\sigma'(f(x),f(y))\prec\delta'.$$

註. 1) 特別是在距離空間 E, E' 的情形,一致連續性的條件可以表達如下: 對於每個正數 ε,必存在正數 δ,使

$$\rho(x,y)\leqslant\delta\Longrightarrow\rho'(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

2) 複距離空間上的一致連續映像必是連續的. 事實上,取 $x_0\in E$,那末依定義 4 中的條件,對於每個 $\delta'\in\varDelta'$, ($\delta'\neq\Theta$), 必存在 $\delta\in\varDelta$

$(\delta \neq \Theta)$,使

$$\sigma(x_0, y) \prec \delta \Longrightarrow \sigma'(f(x_0), f(y)) \prec \delta',$$

即

$$y \in S(x_0; \delta) \Longrightarrow f(y) \in S(f(x_0); \delta').$$

從而連續性證完.

3) 設 E、E_1, E_2 是三個複距離空間,而 f 是由 E 到 E_1 中的一致連續映像,而 g 是由 $f(E) \subset E_1$ 到 E_2 中的一致連續映像,那末 $g \circ f$ 是由 E 到 E_2 中的一致連續映像.

4) 對於距離空間,這裏的一致連續映像乃是數學分析中一致連續函數概念的自然推廣.

定義 5. 兩複距離空間 E 與 E_1 叫做同構的,是指有一由 E 到 E_1 上的一對一映像 f,使 f 與 $\overset{-1}{f}$ 都是一致連續的. 這時 f 叫做同構映像.

例 1. 設 E 與 E_1 都是由集 R^n 形成,但在 E 中令

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2}, \; x = (\xi_k), \; y = (\eta_k),$$

而在 E_1 中令

$$\rho_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|,$$

那末,不難看出,對於任意一對元 x, y,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \rho_1(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho_1(x, y).$$

從而 L: $x \to x$ 是由 E 到 E_1 上的同構映像.

例 2. 設 E 是拓撲空間, 其拓撲結構由一可數的擬距離分離族 $\{\rho_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 決定. 我們證明 E 必是距離空間, 即更確切地說, E 賦以複距離 $\sigma(x, y) = \{\rho_n(x, y)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 必同構於一個距離空間. 事實上,令

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x, y)}{1 + \rho_n(x, y)}.$$

注意對任意非負數 α, β, 有

$$\frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} \leqslant \frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta},$$

從而不難看出

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

又 $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \rho_n(x,y) = 0\ (n = 1,2,\cdots) \Longleftrightarrow x = y$, 因爲 $\{\rho_n\}$ 是分離族. 因此 ρ 確是距離. 令 $\varDelta$ 表示定義 3 下所述, 作爲與複距離 $\sigma(x, y)$ 相應的尺度 (即 $\overline{R}^N$ 中的元的某集). 於是對於任意 $\delta \in \varDelta$, 只有有窮多個, 無妨設 $\rho_1, \cdots, \rho_n$ 受限制, 即

$$\rho_k(x, y) \leqslant \varepsilon_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

由於

$$\frac{\rho_n(x, y)}{1 + \rho_n(x, y)} \leqslant 2^n \rho(x, y),$$

從而

$$\rho(x, y) < \frac{\eta}{2^n(1 + \eta)} \Longrightarrow \rho_n(x, y) < \eta,$$

即

$$\rho(x, y) < \frac{\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \varepsilon_k}{2^n(1 + \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \varepsilon_k)} \Longrightarrow \rho_k(x, y) \leqslant \varepsilon_k\ (1 \leqslant k \leqslant n) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sigma(x, y) \prec \delta.$$

反之, 對於任意 $\varepsilon > 0$, 取 N 足够大, 使 $\sum\limits_{n > N} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, 於是

$$\rho_n(x, y) < \frac{\varepsilon}{2N}\ (1 \leqslant n \leqslant N) \Longrightarrow \rho(x, y) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \frac{\varepsilon}{2N} + \\ + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

證完.

註. 1) 由上面所述可知同構的複距離空間必按由複距離所引導出來的拓撲結構同胚. 逆命題不成立, 即如果兩複距離空間的由其複距離引導出來的拓撲結構同胚, 它們不必是同構的. 下面在論拓撲羣時就可以看到這樣的例.

由上述可知複距離所引出的結構不僅是拓撲結構. 實際上, 用複距離定義拓撲結構時, 我們只用了 $\sigma(x_0, y) \prec \delta$ 的關係, 而複距離還表

達出了 $\sigma(x, y) \prec \delta$ 的關係，即複距離相應的不僅是球 $S(x_0;\delta)$，還有 $V_\delta = \{(x, y)|\sigma(x, y) \prec \delta\}$，即相應於複距離不超過 δ 的一切點偶所組成的集，這種集是在 $E \times E$ 中的。下面我們考察這種集的性質。

注意，設 $E(\sigma, \Delta)$ 是複距離空間，令

$$\mathfrak{U} = \{V_\delta|\delta \in \Delta\},\ V_\delta \equiv \{(x, y)|\sigma(x, y) \prec \delta\},$$

那末 $\mathfrak{U}$ 具有下列性質：$\mathfrak{U}$ 是一個滲透，並且

(U1′)　對每個 $\delta \in \Delta$，$V_\delta \supset D \equiv \{(x, x)|x \in E\}$；

(U2′)　$\overset{-1}{V}_\delta = V_\delta$；

(U3′)　$V_{\frac{\delta}{2}} \circ V_{\frac{\delta}{2}} \subset V_\delta$；

(U4′)　$\bigcap\limits_{\delta \in \Delta} V_\delta = D$.

更一般些，有下列定義：

定義 6．設 E 是任意集。積集 $E \times E$ 中一個滲透 $\mathfrak{U}$ 叫做在 E 上決定一個一致性結構，是指 $\mathfrak{U}$ 滿足下列三條件：

(U_1)　$U \in \mathfrak{U} \Longrightarrow U \supset D$；

(U_2)　$V \in \mathfrak{U} \Longrightarrow \overset{-1}{V} \in \mathfrak{U}$；

(U_3)　$V \in \mathfrak{U} \Longrightarrow \exists W \in \mathfrak{U},\ W \circ W \subset \mathfrak{U}$.

我們也用 $\mathfrak{U}$ 表示這個一致性結構本身。一致性結構 $\mathfrak{U}$ 叫做分離的，是指它滿足

(U_4)　$\bigcap\limits_{U \in \mathfrak{U}} U = D$.

$\mathfrak{U}$ 中的集 U 叫做一致性結構 $\mathfrak{U}$ 中的鄰，$\mathfrak{U}$ 叫做鄰滲透。如果 $(x, y) \in U$，而 $U \in \mathfrak{U}$，x, y 叫做 U 階相鄰。鄰 V 叫做對稱的，是指 $V = \overset{-1}{V}$.

註．1）對於任意鄰 U，$U \cap \overset{-1}{U}$ 是對稱的並且 $\subset U$，從而對稱鄰形成鄰滲透的一個基。一般鄰滲透的任意基叫做基本鄰組。

2）由定義 6 前所述，一個複擬距離（複距離）一定決定一個一致性結構（分離的一致性結構）。下面將證明逆命題也成立，首先我們證明下列命題。

定理 2. 設集 E 上有一族一致性結構 $\mathscr{F} \equiv \{\mathfrak{U}_\iota | \iota \in J\}$, $\mathfrak{U}_\iota$ 是其相應的鄰滲透. $\bigcup_{\iota \in J} \mathfrak{U}_\iota$ 生成一個滲透 $\mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{U}_0$ 是一個一致性結構的鄰滲透, 而這個一致性結構 $\mathfrak{U}_0$ 是諸一致性結構的上端.

證. 由 (U_1) 及第四章 §2, 定理 1, $\mathfrak{S} \equiv \bigcup_{\iota \in J} \mathfrak{U}_\iota$ 確生成一個滲透.

$$\mathfrak{U}_0 \equiv \{U | U \in \mathfrak{P}(E \times E), \exists V_1, \cdots, V_n, V_k \in \mathfrak{U}_{\iota_k} \\ (1 \leqslant k \leqslant n, \iota_k \in J), U \supset V_1 \cap \cdots \cap V_n\}.$$

爲了證明 $\mathfrak{U}_0$ 決定一個一致性結構, 只須證明 (U_3) 成立. 取 $V_k \in \mathfrak{U}_{\iota_k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n, \iota_k \in J)$, 依$(U_3)$存在 $W_k \in \mathfrak{U}_{\iota_k}$, 使 $W_k \circ W_k \subset V_k$. 令

$$V = \bigcap_{k=1}^{n} V_k, \quad W = \bigcap_{k=1}^{n} W_k,$$

於是

$$W \circ W \subset \bigcap_{k=1}^{n} (W_k \circ W_k) \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_k = V,$$

從而 $\mathfrak{U}_0$ 是一致性結構. 因 $\mathfrak{U}_0 \supset \mathfrak{U}_\iota$ $(\iota \in J)$, 如果 $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_\iota$ 且 $\mathfrak{U}_1$ 是一致性結構的鄰滲透 $\Longrightarrow \mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_0$, 所以 $\mathfrak{U}_0$ 是諸 $\mathfrak{U}_\iota$ 的上端.

例 1. 在定義 5 註 1 後面的例中, 已經談到在一集 E 上由有窮分割決定的複距離. 引用那裏的符號, 可知

$$\{(x,y) | \rho_{\mathscr{P}}(x,y) \leqslant \epsilon, x, y \in E\} = \begin{cases} E \times E & \text{如果 } \epsilon \geqslant 1, \\ \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times A_i) & \text{如果 } 0 < \epsilon < 1, \end{cases}$$

這裏 $\mathscr{P}$ 表示分割 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 如果考察一切有窮分割的全體 π, 那末 $\left\{\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \times A_i)\right\}$ (由一個集組成)乃是與分割 $\mathscr{P}$ 相應的一致性結構 $\mathfrak{U}_{\mathscr{P}}$ 的一個基本鄰組, 而由一切 $\mathfrak{U}_{\mathscr{P}}$ 生成的一致性結構正是由一切有窮分割所決定的一致性結構, 也就是由複距離

$$\sigma(x, y) = \{\rho_{\mathscr{P}}(x, y) | \mathscr{P} \in \pi\}$$

決定的一致性結構.

例 2. 設 $E = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 是諸集 A_n 的積集, 換句話說, E 是元列(x_n)

的全體，這裏 $x_n \in A_n\ (n=1, 2, \cdots)$. 設 $\mathfrak{R}_n$ 表示等價關係

$$x \sim y,\ x=(x_n),\ y=(y_n),\ x_k = y_k\ (1 \leqslant k \leqslant n).$$

定義

$$\rho_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x \sim y\ (\mathfrak{R}_n), \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{如果 } x \nsim y\ (\mathfrak{R}_n). \end{cases}$$

令

$$\rho(x, y) = \max_n \rho_n(x, y) \quad (x, y) \in E.$$

不難驗明 $\rho(x, y)$ 是距離，而且三角形不等式取得加强的形式：

$$\rho(x, z) \leqslant \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

注意由 ρ_n 決定的一致結構中鄰滲透的基本鄰組由下列集組成：

$$\mathfrak{U}_n = \{S_n(\varepsilon) | \varepsilon > 0\},\ S_n(\varepsilon) = \{(x, y) | \rho_n(x, y) \leqslant \varepsilon\}.$$

注意

$$S_n(\varepsilon) = \begin{cases} \{(x, y) | x \sim y\ (\mathfrak{R}_n) & \text{如果 } 0 < \varepsilon < \dfrac{1}{n+1}, \\ E \times E & \text{如果 } \quad \varepsilon \geqslant \dfrac{1}{n+1}. \end{cases}$$

又

$$\rho(x, y) \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow \begin{cases} x \sim y\ (\mathfrak{R}_n), & \dfrac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon < \dfrac{1}{n}, \\ x = y, & \varepsilon = 0, \\ x, y \text{ 任意}, & \varepsilon > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

於是不難看出由 ρ 決定的一致性結構乃是由諸 ρ_n 決定的一致性結構 $\mathfrak{U}_n$ 的上端. E 賦以距離 ρ 叫做 Baire 零空間.

例 3. 設 Q 是一切有理數的全體. 取定一個素數 p. 定義：

$$x \sim y\ (\mathfrak{R}_n) \text{ 表示 } p^n | x - y,$$

這裏 $p^n | x$ 表示 p^n 除盡 x, 換句話說, $x = \dfrac{q_1}{q_0} p^n$, q_1, q_0 是兩個互素整數，並且 p 不能除盡 q_0. 取正數 θ, 使 $0 < \theta < 1$, 並規定

$$\rho_n(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x \sim y\ (\mathfrak{R}_n), \\ \theta^n & \text{如果 } x \nsim y\ (\mathfrak{R}_n). \end{cases}$$

令

$$\rho(x, y) = \max_n \rho_n(x, y) \quad (x, y \in Q),$$

那末 $\rho(x, y)$ 是距離，三角形不等式成爲加强的形式

$$\rho(x, y) \leqslant \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$$

由 ρ 決定的一致性結構恰是由諸擬距離 ρ_n 決定的一致性結構 $\mathfrak{U}_n$ 的上端，賦以距離 ρ，Q 叫做 p-進空間．這是由 K. Hensel 引入的．在討論完備化問題時，我們將還要回到這個例．

現在來證明每個一致性結構必可由一複距離決定．

定理 3. 設 $\mathfrak{U}$ 是集 E 上一個一致性結構，那末必存在複擬距離 $(\sigma, \varDelta)$，使它所決定的一致性結構等於 $\mathfrak{U}$．

證. 對於每個 $V \in \mathfrak{U}$，依 (U_1)—(U_3)，存在一列鄰 U_n，使

$$U_1 \subset V,\ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n \ (n = 1, 2, \cdots).$$

$\{U_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是某一致性結構 $\mathfrak{U}_V$ 的一個基本鄰組，$\mathfrak{U}_V \subset \mathfrak{U}$．又 $\mathfrak{U} = \bigcup_{V \in \mathfrak{U}} \mathfrak{U}_V$．因此，我們只須證明下列命題：如 E 上一致性結構 $\mathfrak{U}$ 具有由可數多個鄰組成的基本鄰組，那末 E 上必存在擬距離 ρ，使 ρ 在 E 上所決定的一致結構等於 $\mathfrak{U}$．實際上，對於每個上述的 $\mathfrak{U}_V$，令 ρ_V 表示決定它的擬距離，那末 $\sigma(x, y) \equiv (\rho_V(x, y) | V \in \mathfrak{U})$ 就是所求的複距離．

現在證明上述命題．設 (V_n) $(n = 1, 2, \cdots)$ 是一致性結構 $\mathfrak{U}$ 的基本鄰組．定義一族對稱鄰 U_n，使

$$U_1 \subset V_1,\ \text{而}\ U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n \cap \bigcap_{p=1}^{n} V_n (n = 1, 2, \cdots).$$

這由 U_1—U_3 是可能的（注意 $U_{n+1} \supset D$，從而 $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} = U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ D \subset \overset{4}{U}_{n+1}$）．不難看出 $\{U_n\}$ 仍是 $\mathfrak{U}$ 的基本鄰組，並且 $\overset{3}{U}_{n+1} \subset U_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$．在 $E \times E$ 上定義一個實值函數 g 如下：

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } (x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n, \\ 2^{-k} & \text{如果 } (x, y) \in U_n \ (1 \leqslant n \leqslant k), \text{ 但 } (x, y) \notin U_{k+1}, \\ 1 & \text{如果 } (x, y) \notin U_1. \end{cases}$$

由於諸 U_n 是對稱的，所以 g 是非負值對稱函數，其值 $\leqslant 1$，並且

$$g(x, x) = 0 \quad (x \in E).$$

令

$$\rho(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \,|\, p \in N,\ z_0 = x, \right.$$
$$\left. z_p = y,\ z_i \in E,\ (0 \leqslant i \leqslant p) \right\}.$$

我們證明 ρ 是擬距離，並且滿足

$$\frac{1}{2} g(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant g(x, y) \quad (x, y \in E). \tag{2}$$

事實上，$\rho(x, y) \leqslant g(x, y)$ 由 ρ 的定義已明顯，同樣不難看出 ρ 是非負值對稱函數，並滿足三角不等式．又 $0 \leqslant \rho(x, x) \leqslant g(x, x) = 0$，從而 ρ 確是擬距離．為了完成(2)的證明，只須證對於任意自然數 p，

$$\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geqslant \frac{1}{2} g(x, y),\ (z_0 = x,$$
$$z_p = y,\ z_i \in E\ (0 \leqslant i \leqslant p)). \tag{3}$$

(3) 對於 $p = 1$ 是顯然的．設對於 p 個點的情形 (3) 已經得證，要由此導出 $p + 1$ 個分點 $z_0, z_1, \cdots, z_p$ 的情形．令

$$\alpha = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}).$$

如果 $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$，那末，因 $g(x, y) \leqslant 1$，(3)不待證．今設 $\alpha < \frac{1}{2}$．令

$$h = \max \left\{ k \,\middle|\, \sum_{i<k} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{\alpha}{2} \right\},$$

那末

$$\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{\alpha}{2},\ \text{但} \sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) > \frac{\alpha}{2},$$

從而

$$\sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) - \sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

依歸納法假定，

$$\frac{1}{2} g(x, z_h) \leqslant \sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{\alpha}{2}, \ \frac{1}{2} g(z_{h+1}, y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leqslant \frac{\alpha}{2}.$$

又由 α 的定義，$g(z_h, z_{h+1}) \leqslant \alpha$. 設

$$k = \inf\{m \mid m \in N, 2^{-m} \leqslant \alpha\},$$

於是因 $\alpha < \frac{1}{2}$, $k \geqslant 2$, 而依 g 的定義，

$$(x, z_h) \in U_k, (z_h, z_{h+1}) \in U_k, (z_{h+1}, y) \in U_k,$$

從而

$$(x, y) \in U_k \circ U_k \circ U_k \subset U_{k-1},$$

而由此

$$g(x, y) \leqslant 2^{-(k-1)} \leqslant 2\alpha$$

證明了(3).

於是由(3)得知

$$(x, y) \in U_k \text{ 且 } 2^{-k} < \alpha \Longrightarrow g(x, y) \leqslant 2^{-k} < \alpha \Longrightarrow \rho(x, y) < \alpha;$$

$$\rho(x, y) \leqslant 2^{-k-1} \Longrightarrow g(x, y) \leqslant 2^{-k} \Longrightarrow (x, y) \in U_k,$$

從而 $\{\overset{-1}{\rho}[0, \alpha]\}$ $(\alpha > 0)$ 形成 $\mathfrak{U}$ 的基本鄰組. 證完.

系. 設 $\mathfrak{U}$ 是一致空間 E 的鄰滲透，那末對於每個 $x_0 \in E$, $\{V(x_0) \mid V \in \mathfrak{U}\}$ 是 x_0 的基本鄰域組，這裏 $V(x_0) = \{x \mid (x, x_0) \in \mathfrak{U}\}$.

註. 由此，在下面考察中對複擬距離空間與具一致性結構的集常不加區分，也就是說，對於一個所給的複擬距離空間，我們常設它上面賦有由複擬距離所決定的一致性結構，而反之，對一個具一致性結構的集，我們常設它上面賦有決定這個一致性結構的複擬距離. 既然複擬距離又決定一個拓撲結構，因此當具一致性結構的集上面賦以由相應複擬距離決定的拓撲結構時，我們將稱它爲一致性空間. 若將複擬距離改成複距離，一致性結構改成分離的一致性結構，則有同樣的註.

與複擬距離相應的拓撲結構不是(T_2)型的．我們從它導出一個分離的，也就是說複距離空間如下．令

$$x \sim y(\mathfrak{R}) \text{ 表示 } \sigma(x, y) = \Theta,$$

由三角形不等式與σ的對稱性可知，$\mathfrak{R}$是等價關係．令$\dot{E} \equiv E/\mathfrak{R}$（即$E$中按$\mathfrak{R}$的剩餘類的全體）．對於$\dot{x}, \dot{y} \in \dot{E}$，定義

$$\dot{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) \equiv \sigma(x, y) \quad (x \in \dot{x}, y \in \dot{y}, x, y \in E).$$

這定義是一意的．如果$x \sim x_1$，$y \sim y_1$那末

$$\sigma(x, y) \leqslant \sigma(x, x_1) + \sigma(x_1, y_1) + \sigma(y_1, y) = \sigma(x_1, y_1),$$

同理$\sigma(x_1, y_1) \leqslant \sigma(x, y)$，從而$\sigma(x, y) = \sigma(x_1, y_1)$．這個$\dot{\sigma}$是複距離．事實上，

$$\dot{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) = \Theta \Longrightarrow \sigma(x, y) = \Theta(x \in \dot{x}, y \in \dot{y}) \Longrightarrow x \sim y \Longrightarrow \dot{x} = \dot{y},$$

而其它性質不待驗證．於是$\dot{E}$是複距離空間．

設$f_{\mathfrak{R}}$表示由E到$\dot{E}$的典範映像$x \to \dot{x}\ (\ni x)$．既然

$$\dot{\sigma}(f_{\mathfrak{R}}(x), f_{\mathfrak{R}}(y)) = \sigma(x, y),$$

從而$f_{\mathfrak{R}}$是一致連續的．我們證明$\dot{E}$賦以複距離$\dot{\sigma}$時是複擬距離空間E按$\mathfrak{R}$的商空間．事實上，設$O \subset \dot{E}$，而$\overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(O)$在$E$中是開集．令$\dot{x} \in O$，取$x \in \dot{x}$，那末$x \in \overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(O)$，從而必存在$\delta \in \Delta$，使

$$\sigma(x, y) \prec \delta \Longrightarrow y \in \overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(O).$$

於是

$$\dot{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) \prec \delta \Longrightarrow \sigma(x, y) \prec \delta \Longrightarrow y \in \overset{-1}{f}_{\mathfrak{R}}(O) \Longrightarrow \dot{y} \in O.$$

這正是說，O是$\dot{E}$中的開集．於是複距離空間$\dot{E}$上的拓撲結構是使$f_{\mathfrak{R}}$爲連續的最精拓撲結構，從而$\dot{E}$正是商空間$E/\mathfrak{R}$．

下面舉幾個有用的，一致空間的例．

例．設E是任意集，F是一致空間，A是E的子集，V是F的一個鄰．在由E到F中的一切映像的集F^E中，定義

$$W(A, V) \equiv \{(u, v) \mid u, v \in F^E, x \in A \Longrightarrow (u(x), v(x)) \in V\}.$$

如果$\mathfrak{U}$是F的鄰滲透，那末

$$\{W(A, V) \mid V \in \mathfrak{U}\}$$

形成 F^E 上一個一致性結構的基本鄰組. 事實上,

$$V \subset V' \Longrightarrow W(A, V) \subset W(A, V'),$$

$$\overset{-1}{\overbrace{W(A, V)}} = W(A, \overset{-1}{V}).$$

如 $x \in A \Longrightarrow (u(x), v(x)) \in V$ 且 $x \in A \Longrightarrow (v(x), w(x)) \in V$, 那末 $x \in A \Longrightarrow (u(x), w(x)) \in V \circ V$, 從而

$$\overset{2}{\overbrace{W(A, V)}} \subset W(A, \overset{2}{V}).$$

這樣在 F^E 上決定的一致性結構叫做集 A 上的一致收斂的結構. 如果 F 的一致性結構由距族 (ρ_ι) $(\iota \in J)$ 決定,那末對於 $u, V \in F^E$, 定義

$$\rho_\iota^A(u, v) = \sup_{x \in A} \rho_\iota(u(x), v(x)),$$

不難看出 ρ_ι^A 是 F^E 上的距, 而距族 (ρ_ι^A) $(\iota \in J)$ 在 F^E 上決定的一致性結構正是上面所述集 A 上一致收斂的結構. 這裏命名的原因是這樣的. 爲了 F^E 中元列 (u_δ) 按上述一致結構所引起的拓樸結構收斂於 $u_0 \in F^E$, 必須且只須對於 u_0 的每個鄰域

$$V(u_0; \iota_1, \cdots, \iota_n; \varepsilon) \equiv \{v \mid \rho_{\iota_k}^A(u_0, v) < \varepsilon, 1 \leqslant k \leqslant n, \iota_k \in J, v \in F^E\}$$

(見本節定義 2), $\exists \delta_0$, 使 $\delta > \delta_0 \Longrightarrow u_\delta \in V(u_0; \iota_1, \cdots, \iota_n; \varepsilon)$, 也就是說

$$\rho_{\iota_k}^A(u_0, u_\delta) < \varepsilon \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

或

$$x \in A \Longrightarrow \rho_{\iota_k}(u_0(x), u_\delta(x)) < \varepsilon \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

這正意味着 $(u_\delta(x))$ 在 A 上"一致"(按平常數學分析中的意義)收斂於 $u_0(x)$.

如果 $\mathfrak{S}$ 是 E 上的一個子集族, $\mathfrak{S} \neq \phi$. 對於每個 $A \in \mathfrak{S}$, 可以定義 F^E 上集 A 上一致收斂的一致性結構 $\mathfrak{U}_A$ 如上. 設 $\mathfrak{U}_\mathfrak{S}$ 表示諸一致性結構 $\mathfrak{U}_A$ $(A \in \mathfrak{S})$ 的上端(定理 2), $\mathfrak{U}_\mathfrak{S}$ 也是 F^E 上一個一致性結構, 叫做 $\mathfrak{S}$ 中集上的一致收斂的結構, 而 F^E 賦以一致性結構 $\mathfrak{U}_\mathfrak{S}$ 往往表示成 $f_\mathfrak{S}(E, F)$, 這符號也用來表示相應的一致空間. 由一族滲透所生成的滲透的定義不難看出, 當 $\mathfrak{S}$ 被換成 $\mathfrak{S}$ 中集的有窮併的全體 $\mathfrak{S}'$, 或換成 $\mathfrak{S}$ 中集的子集的

全體 $\mathfrak{S}''$，都並不改變 $\mathfrak{U}_{\mathfrak{S}}$．因此無妨設 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{P}(E)$ 中的一個幻．由於 $\mathfrak{S}$ 的不同選法，可以得出在數學分析中常用的種種一致性結構來．

（1）點點收斂的一致性結構．令 $\mathfrak{S}$ 表示 E 的一切有窮子集的全體，相應的距族是

$$\{\rho_\iota^x(u, v) \mid \iota \in J,\ x \in E\},$$

這裏 $\{\rho_\iota \mid \iota \in J\}$ 是決定 F 上一致性結構的相應距族．F^E 中元列 (u_δ) 按這個一致空間的拓撲結構收斂於 $u_0 \in F^E$ 的必要充分條件乃是 $(u_\delta(x))$ 對每個 $x \in E$ 收斂於 $u_0(x)$，因此這個一致性結構叫做點點收斂的結構，表示成 $\mathfrak{U}_s$．如果取 $F = K$（數域），而令 K 上的一致性結構由下列距離決定：

$$\rho(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta| \ (\alpha - \beta \text{ 在 } K \text{ 中的絕對值}),$$

那末 K^E（即 E 上在 K 中取值的函數的全體）上的點點收斂一致結構正是平常數學分析中的點點收斂結構，其相應距族是

$$\{\rho^x \mid x \in E\},\ \rho^x(u, v) = |u(x) - v(x)|,\ u, v \in K^E,\ x \in E.$$

如果取 $\mathfrak{S} \equiv \{E\}$ 由 E 一個集組成，那末相應的距族是

$$\{\rho_\iota^E \mid \iota \in J\},\ \rho_\iota^E(u, v) = \sup_{x \in E} \rho_\iota(u(x), v(x)),$$

(ρ_ι) 是 F 上相應的距族．因此，(u_δ) 在這個一致空間中收斂於 u_0 的必要充分條件，乃是 $(u_\delta(x))$ 在全 E 上一致收斂於 $u_0(x)$，因此這個一致性結構叫做（在 E 上的）一致收斂結構，相應的一致空間表示成 $f_u(E, F)$．如果仍考察集 K^E，相應的距是

$$\rho^E(u, v) = \sup_{x \in E} |u(x) - v(x)|,$$

從而相應的收斂正是按平常數學分析意義的一致收斂．

在數學分析中還常出現的是緊收斂的一致結構．設 E 本身是拓撲空間，令 $\mathfrak{S}$ 表示 E 的一切緊子集的全體，相應的 F^E 上距族是

$$\{\rho_\iota^C(u, v) \mid \iota \in J,\ C \in \mathfrak{S}\},$$

這裏

$$\rho_\iota^C(u, v) = \sup_{x \in C} \rho_\iota(u(x), v(x)).$$

如果取 K^E 如前，那末

$$\rho^C(u, v) = \sup_{x \in C} |u(x) - v(x)|.$$

F^E 賦以這個“緊收斂的一致性結構”變成一致空間，表示成 $\mathfrak{F}_c(E, F)$。這樣的“緊收斂”是指在 E 的每個緊子集上一致收斂，從而在古典數學分析上是常出現的。例如在解析函數理論中，當我們考察定義在一個區域 G 上的解析函數列 $u_n(z)$ 時，常考察在拓撲空間 G（作爲複數平面的子空間）中的緊收斂，也就是說，在 G 的每個有界閉集上一致收斂[1]。又如在數學分析中，當我們考察定義在數直綫上，在有窮區間之外等於 0 並具有各階連續導函數的函數列 $u_n(t)$ 時，我們常考察它及它各階導函數列的在每個有窮區間上的一致收斂。

參 考 文 獻

[1] Appert, A., Écart partiellement ordonné et uniformité, C. R. Paris, 224 (1947), 442—444.

[2] Colmez, J., Espaces à écart jénéralisé régulièr, C. R. Paris, 224 (1947), 372—373.

——, Des espaces à écart, Revue scientifique 85, 1 (1947), 39—41.

[3] Fréchet, M., La notion L'uniformité et les écarts abstraits, C. R. Paris, 221 (1945), 337.

Fréchet, M., De l'écart numérique à l'écart abstrait, Port. Math., 5 (1946), 121—131.

[4] Kurepa, G., Le problème de Souslin et les espaces abstraits, C. R., 203 (1936), 1049.

——, Sur les classes ($\mathscr{E}$) et ($\mathscr{D}$), Pube. de Math. de l'Univ. de Belgrade, 5 (1936), 197.

——, Un critère de distanciabilité, Math. (Cluj), 13 (1937).

§2. 完備性，複距離空間的完備化

有理數全體 Q 按照距離 $\rho(x, y) \equiv |x-y|$ 是“非完備”的距離空間，即其中“基本列”不必在 Q 中收斂。要使基本列在空間中必收斂，我們按照 G. Cantor 添入一些“理想元”，使 Q“完備化”，成爲實數全體 R。這種完備性的考察與完備化的步驟都可以直接移植到一般的一致空間上來。

---

1) 有些作者叫做在區域 G 內部的一致收斂 (A. И. Маркушевич 的解析函數論, стр. 198)或在 G 上殆一致收斂 (S. Saks & A. Zygmund, Analytyczne Funkcje).

定義 1. 複擬距離空間 $E = E(\sigma, \Delta)$ 中的點列 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 叫做基本列，是指對每個 $\delta \in \Delta$，存在 $\alpha_0 \in A$，使

$$\alpha_1, \alpha_2 \in A, \alpha_1 \succ \alpha_0, \alpha_2 \succ \alpha_0 \Longrightarrow \sigma(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \prec \delta.$$

註．在一般複擬距離空間 E 中，收斂列必是基本列．事實上，如果 $(x_\alpha) \to x_0$，那末對於每個 $\delta \in \Delta$，必存在 α_0，使

$$\alpha \succ \alpha_0 \Longrightarrow \sigma(x_\alpha, x_0) \prec \frac{\delta}{2},$$

從而 $\alpha_1, \alpha_2 \succ \alpha_0 \Longrightarrow \sigma(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) \leqslant \sigma(x_{\alpha_1}, x_0) + \sigma(x_0, x_{\alpha_2}) \prec \delta$．古典的有理數全體 Q 的例說明在一般複距離空間中，基本列不必在空間中收斂．

定義 2. 複擬距離空間 $E = E(\sigma, \Delta)$ 叫做完備的(簡稱備的)，是指其中每個基本列 (x_α) $(\alpha \in A)$ 必收斂於 E 中一點．

例．熟知，數直綫 R 是按距離 $|x - y|$ 完備的．

註．由定義不難看出，備空間的閉子空間必仍是備的．事實上，設 (x_α) 是備空間 E 的閉子空間 M 中的基本列，那末 (x_α) 也是 E 中基本列．依 E 的備性，$\exists x_0 \in E$，使 $x_\alpha \to x_0$．M 旣是閉的，而 $x_\alpha \in M$，必然 $x_0 \in M$，從而 M 是備的．

定理 1 (完備化定理). 每個複擬距離空間 E 必可完備化，即存在一個完備複擬距離空間 E_0，使 E 同構於 E_0 的一個稠子空間．如果 E 是複距離空間，也可以選擇 E_0，使 E_0 是複距離空間．E 的完備化 E_0 除同構外一意決定．

證．1) 設 $\widetilde{E}$ 是 E 中一切基本定向列 (x_α) 的全體．$\widetilde{E}$ 中兩元 (x_α) 與 (y_β) (不必是同序的定向列：$\alpha \in A$, $\beta \in B$) 叫做等價 $\Re$，是指當定義

$$x_{\alpha,\beta} \equiv x_\alpha (\beta \in B), \; y_{\alpha,\beta} \equiv y_\beta (\alpha \in A) \tag{1}$$

並定義 $(\alpha, \beta) \succ (\alpha', \beta')$ 爲指 $\alpha \succ \alpha'$ 且 $\beta \succ \beta'$ 時，兩列 $(x_{\alpha,\beta})$，$(y_{\alpha,\beta})$ 滿足下列條件：

$$\lim_{(\alpha,\beta)} \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) = \Theta.$$

一般，規定 $\widetilde{E}$ 中任意兩元 (x_α) 與 (y_β) 之間的複距離 $\sigma_0(x, y)$ 爲

$$\sigma_0((x_\alpha),(y_\beta)) \equiv \lim_{(\alpha,\beta)} \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}), \tag{2}$$

這裏$(x_{\alpha,\beta})$與$(y_{\alpha,\beta})$定義如(1). 首先,(2)中的極限確存在. 事實上,設$\sigma(x, y) \equiv (\rho_\iota(x, y))$,那末對於每個$\iota(\iota \in J)$,

$$\begin{aligned}|\rho_\iota(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) - \rho_\iota(x_{\alpha',\beta'}, y_{\alpha',\beta'})| &\leqslant \\ &\leqslant |\rho_\iota(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) - \rho_\iota(x_{\alpha',\beta'}, y_{\alpha,\beta})| + \\ &\quad + |\rho_\iota(x_{\alpha',\beta'}, y_{\alpha,\beta}) - \rho_\iota(x_{\alpha',\beta'}, y_{\alpha',\beta'})| \leqslant \\ &\leqslant \rho_\iota(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha',\beta'}) + \rho_\iota(y_{\alpha,\beta}, y_{\alpha',\beta'}).\end{aligned}$$

從而當$(x_{\alpha,\beta})$, $(y_{\alpha,\beta})$是基本列時, $(\rho_\iota(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}))(\alpha,\beta)$(固定$\iota \in J$)是基本數列,從而$\lim\limits_{(\alpha,\beta)} \rho_\iota(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta})$存在,於是

$$\lim_{(\alpha,\beta)} \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) = (\lim \rho_\iota(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}))_{\iota\in J}$$

也存在. 注意既然(x_α)是基本列,對於任意$\delta \in \Delta$,必存在$\alpha_0 \in A$,使

$$\alpha, \alpha' \succ \alpha_0 \Longrightarrow \sigma(x_\alpha, x_{\alpha'}) \prec \delta,$$

從而

$$\alpha, \alpha' \succ \alpha_0 \Longrightarrow \sigma(x_{\alpha,\beta}, x_{\alpha',\beta'}) \prec \delta$$

對任意$\beta, \beta' \in B$成立,於是$(x_{\alpha,\beta})$也是基本列.

規定$\widetilde{E}$中元$(x_\alpha) \sim (y_\beta)$ $(\mathfrak{R})$, 指

$$\lim_{(\alpha,\beta)} \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) = 0.$$

不難驗明, $\mathfrak{R}$是等價關係,並且仿上面對$\lim\limits_{(\alpha,\beta)} \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta})$存在的證明可以證明:

$$\begin{aligned}(x_\alpha) \sim (x'_{\alpha'}), (y_\beta) \sim (y'_{\beta'}) \Longrightarrow \sigma_0((x_\alpha), (y_\beta)) &= \\ = \sigma_0((x'_{\alpha'}), (y'_{\beta'})).&\end{aligned}$$

事實上,例如設$(x_\alpha) \sim (y_\beta)$, $(y_\beta) \sim (z_\gamma)$,那末定義$(x_{\alpha,\beta})$, $(y_{\alpha,\beta})$如(1),以及

$$y_{\beta,\gamma} \equiv y_\beta (\gamma \in \Gamma), \ z_{\beta,\gamma} \equiv z_\gamma (\beta \in B),$$

使

$$\lim_{(\alpha,\beta)} \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) = \Theta, \ \lim_{(\beta,\gamma)} \sigma(y_{\beta,\gamma}, z_{\beta,\gamma}) = \Theta.$$

於是令

$$x_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv x_\alpha (\beta \in B, \gamma \in \Gamma), \ y_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv y_\beta (\alpha \in A, \gamma \in \Gamma),$$
$$z_{\alpha,\beta,\gamma} \equiv z_\gamma (\alpha \in A, \beta \in B),$$

得

$$\sigma(x_{\alpha,\beta,\gamma}, z_{\alpha,\beta,\gamma}) \leqslant \sigma(x_{\alpha,\beta,\gamma}, y_{\alpha,\beta,\gamma}) + \sigma(y_{\alpha,\beta,\gamma}, z_{\alpha,\beta,\gamma}) =$$
$$= \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) + \sigma(y_{\beta,\gamma}, z_{\beta,\gamma}),$$

從而如果

$$x_{\alpha,\gamma} \equiv x_\alpha\ (\gamma \in \Gamma),\ z_{\alpha,\gamma} \equiv z_\gamma\ \ (\alpha \in A),$$

那末

$$\Theta \leqslant \sigma(x_{\alpha,\gamma}, z_{\alpha,\gamma}) \leqslant \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) + \sigma(y_{\beta,\gamma}, z_{\beta,\gamma}),$$

即

$$\lim_{(\alpha,\gamma)} \sigma(x_{\alpha,\gamma}, z_{\alpha,\gamma}) = \Theta,$$

這就是說 $(x_\alpha) \sim (z_\gamma)$.

考察商集 $\widetilde{E}/\mathfrak{N}$, 在這個集 $E_0 \equiv \widetilde{E}/\mathfrak{N}$ 上,令

$$\bar{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) = \sigma_0((x_\alpha), (y_\beta)),$$

由上述知道 $\bar{\sigma}$ 的定義與 $\dot{x}, \dot{y}$ 的代表列 (x_α), (y_β) 的選擇無關, 從而 $\bar{\sigma}$ 在 $E_0 \times E_0$ 上一意決定. 不難看出

$$\bar{\sigma}(\dot{x}, \dot{x}) = \Theta,\ \bar{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) = \bar{\sigma}(\dot{y}, \dot{x}),$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}(\dot{x}, \dot{z}) &= \sigma_0((x_\alpha), (z_\gamma)) = \lim_{(\alpha,\gamma)} \sigma(x_{\alpha,\gamma}, z_{\alpha,\gamma}) \leqslant \\
&\leqslant \lim_{(\alpha,\beta,\gamma)} [\sigma(x_{\alpha,\beta,\gamma}, y_{\alpha,\beta,\gamma}) + \sigma(y_{\alpha,\beta,\gamma}, z_{\alpha,\beta,\gamma})] = \\
&= \sigma_0((x_\alpha), (y_\beta)) + \sigma_0((y_\beta), (z_\gamma)) = \\
&= \bar{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) + \bar{\sigma}(\dot{y}, \dot{z}),\\
\bar{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) &= \Theta \Longrightarrow \sigma_0((x_\alpha), (y_\beta)) = \Theta \Longrightarrow \lim_{(\alpha,\beta)} \sigma(x_{\alpha,\beta}, y_{\alpha,\beta}) = \\
&= \Theta \Longrightarrow (x_\alpha) \sim (y_\beta) \Longrightarrow \dot{x} = \dot{y},
\end{aligned}$$

於是得證 $\bar{\sigma}$ 是 E_0 上複距離, 這就是說, E_0 是複距離空間.

我們先證明 E 同構於 E_0 的一個稠子空間. 事實上, 令

$$f(x) = \dot{x}\ \ (x \in E),$$

這裏 $\dot{x}$ 表示包含元列 (x_α) 的剩餘類 $(\mathfrak{N})$, 而對每個 α, $x_\alpha \equiv x$. 於是 f 是由 E 到 E_0 中的映像, 因爲這裏的 (x_α) 是 E 中基本列. 對於 $y \in E$, 也含 $y_\alpha \equiv y$, 那末含 (y_α) 的剩餘類 $(\mathfrak{N})$ 表示成 $\dot{y}$, 於是

$$\bar{\sigma}(\dot{x}, \dot{y}) = \sigma_0((x_\alpha), (y_\alpha)) = \lim \sigma(x, y) = \sigma(x, y),$$

從而 f 是由 E 到 E_0 中的同構. $f(E)$ 在 E_0 中稠. 實際上, 對於任意

$\dot{x}\in E_0$, 令 $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 $\dot{x}$ 的一個代表列,從而 (x_α) 是 E 中基本列. 於是對於每個 $\delta\in\Delta$, $\exists\,\alpha_0=\alpha_0(\delta)$, 使

$$\alpha_1\succ\alpha_0\Longrightarrow\sigma(x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_0})\prec\delta.$$

定義 $x_{\alpha_0,\alpha_1}\equiv x_{\alpha_0}(\alpha_1\in A)$,於是

$$\alpha_1\succ\alpha_0\Longrightarrow\sigma(x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_0,\alpha_1})\prec\delta,$$

這就是說,

$$\sigma_0((x_\alpha),\ (x_{\alpha_0,\alpha}))=\lim_{\alpha_1}\sigma(x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_0,\alpha_1})\prec\delta.$$

於是

$$\bar{\sigma}(\dot{x},\ \dot{x}_{\alpha_0})\prec\delta,$$

這裏 $\dot{x}_{\alpha_0}\equiv f(x_{\alpha_0})$, 從而證完了 $f(E)$ 在 E_0 的稠性.

現在證明 E_0 是備的距離空間. 依上段已證過的部分,只須證明下列一般命題: 如果複距離空間 E_0 中有一稠集 A, 使 A 中任意基本列必收斂於 E_0 中一點, 那末 E_0 是備的. 事實上, 如果這個命題成立,那末取 $A=f(E)$, 如上,對於 A 中任意基本列 $(\dot{x}_\alpha)\equiv(f(x_\alpha))$, (x_α) 是 E 中基本列(因爲 f 是同構),從而 (x_α) 决定 E_0 中一元 $\dot{x}_0$, 於是

$$\bar{\sigma}(\dot{x}_{\alpha_0},\ \dot{x}_0)=\sigma_0((x_{\alpha_0}),\ (x_\alpha))=\lim_{\alpha}\sigma(x_{\alpha_0},\ x_\alpha)\prec\delta.$$

如果取 α_0 "足够大",於是 E_0 的備性得證. 現在回來證明上述命題.

設 (x_α) 是 E_0 中任意基本列,於是對任意 $\delta_0\in\Delta$, $\exists\,\alpha_0=\alpha_0(\delta_0)$, 使

$$\alpha_1,\ \alpha_2\succ\alpha_0\Longrightarrow\sigma(x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2})\prec\frac{\delta_0}{3}.$$

由於 A 在 E_0 中的稠性, 對每個 α 可以在 A 中找出一個 Δ-序型的點列 $(x'_{\alpha,\delta})$, 使

$$\delta\succ\delta_0\Longrightarrow\sigma(x_\alpha,\ x'_{\alpha,\delta})\prec\frac{\delta_0}{3}.$$

$(x'_{\alpha,\delta})((\alpha,\ \delta)\in A\times\Delta)$ 是 A 中基本列,因爲

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1,\ \alpha_2\succ\alpha_0(\delta_0)\\ \delta_1,\ \delta_2\succ\delta_0\end{array}\right\}\ \sigma(x'_{\alpha_1,\delta_1},\ x'_{\alpha_2,\delta_2})\leqslant\sigma(x'_{\alpha_1,\delta_1},\ x_{\alpha_1})+$$

$$+\ \sigma(x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2})+\sigma(x_{\alpha_2},\ x'_{\alpha_2,\delta_2})\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}+\frac{\delta}{3}=\delta,$$

於是依關於A的假定，$(x'_{\alpha,\delta})\to x_0\in E_0$. 由此知

$$\sigma(x_\alpha, x_0)\leqslant\sigma(x_\alpha, x'_{\alpha,\delta})+\sigma(x'_{\alpha,\delta}, x_0),$$

而先取δ_0，使$\delta\succ\delta_0\Longrightarrow\sigma(x_\alpha, x_{\alpha,\delta})\prec\dfrac{\delta_0}{3}$，再取$\alpha_1$，$\delta_1$，使

$$\alpha\succ\alpha_1,\ \delta\succ\delta_1\Longrightarrow\sigma(x'_{\alpha,\delta}, x_0)\prec\frac{\delta_0}{3},$$

於是

$$\alpha\succ\alpha_1,\ \delta\succ\delta_0,\ \delta_1\Longrightarrow\sigma(x_\alpha, x_0)\prec\delta_0,$$

從而$(x_\alpha)\to x_0$.

定理的最後部分，即完備化的一意性，由下列定理直接看出。

定理 2. 設E_1，E_2是兩個備複距離空間，A_1，A_2各是E_1，E_2中的稠子空間，那末由A_1到A_2上的每個同構f必可延拓成由E_1到E_2上的同構。

證. 對於$x\in E_1$，$\exists\, x_\delta\in A_1$，使$(x_\delta)\to x$，這裏$\delta\in\Delta$，$E_1=E_1(\sigma_1, \Delta)$. 定義

$$f(x)=\lim_\delta f(x_\delta).$$

如果$x'_\delta\in A_1$，$(x'_\delta)\to x$，那末$\sigma_1(x_\delta, x'_\delta)\to\Theta$. 由$f$的一致連續性，$\sigma_2(f(x_\delta), f(x'_\delta))\to\Theta$，從而

$$\lim_\delta f(x_\delta)=\lim_\delta f(x'_\delta),$$

這就是說，$f(x)$由x一意決定，與所取的收斂於x的A_1中元列(x_δ)的選擇無關。於是f定義在全E_1上。同理$\overset{-1}{f}\equiv g$也可以延拓成由E_2到E_1中的映像。f在全E_1上一致連續，因爲對於任意$\delta_2\in\Delta_2$ $(E_2=E_2(\sigma_2, \Delta_2))$，取$\delta_1\in\Delta_1$，使

$$x_1, x_2\in A_1,\ \sigma_1(x_1, x_2)\prec\delta_1\Longrightarrow\sigma_2(f(x_1), f(x_2))\prec\delta_2.$$

對於一般的x_1，$x_2\in E$，取$\sigma_1(x_1, x_2)\prec\dfrac{\delta_1}{3}$，那末取$(x'_\delta)\to x$，$(x''_\delta)\to$ $\to x_2$，x'_δ，$x''_\delta\in A_1$，設當

$$\delta\succ\delta_0\text{時}\ \sigma_1(x_1, x'_\delta)\prec\frac{\delta_1}{3},\ \sigma_1(x_2, x''_\delta)\prec\frac{\delta_1}{3},$$

從而

$$\delta\succ\delta_0\Longrightarrow\sigma_1(x'_\delta, x''_\delta)\leqslant\sigma_1(x'_\delta, x_1)+\sigma_1(x_1, x_2)+\sigma_1(x_2, x''_\delta)\prec\delta_1.$$

於是

$$\sigma_2(f(x_1), f(x_2)) = \sigma_2(\lim f(x'_\delta), \lim f(x''_\delta)) =$$
$$= \lim_\delta \sigma_2(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \prec \delta_2.$$

這證明了 $\bar{f}$ 在 E_1 上一致連續. 同理 g 也可以延拓成由 E_2 到 E_1 中的一致連續映像 $\bar{g}$. 於是 $\bar{g}\circ\bar{f}$ 是由 E_1 到它自己之中的一致連續映像, 且它在 A_1 上與不變映像 ι 相同. 因此 $\bar{g}\circ\bar{f}$ 是由 E_1 到它自己之中的不變映像. 同理證明 $\bar{f}\circ\bar{g}$ 是 E_2 中的不變映像. 於是得知 $\bar{f}$ 是由 E_1 到 E_2 上的一對一映像, 而 $\bar{g}$ 是其逆映像, $\bar{f}$ 與 $\bar{g}$ 都一致連續. 從而 $\bar{f}$ 是同構.

下面藉滲透表達出一致空間備性的一個特徵.

定義 3. 在一致空間 E 中, 滲透 $\mathfrak{f}$ 叫做 Cauchy 的, 是指對於每個 E 中的鄰 U, 存在 $F\in\mathfrak{f}$, 使 $F\times F\subset U$.

定理 3. 為了一致空間 E 是備的, 必須且只須 E 中每個 Cauchy 滲透收斂於 E 中一元 x.

證. 1) 設 E 是備的; 設 $\mathfrak{f}$ 是 Cauchy 滲透. 對於每個 $F\in\mathfrak{f}$, 取一點 $x_F\in F$, 因 $\mathfrak{f}$ 中集按包含關係 $\supset$ 是一定向集, 所以 $(x_F)_{F\in\mathfrak{f}}$ 是 E 中定向列. (x_F) 是基本列. 設 σ 是 E 上的決定它的一致性結構的複距離, 那末對於每個 $\delta\in\Delta$, 必存在 E 上的鄰 U, 使

$$U\subset V_\delta\equiv\{(x, y)\mid\sigma(x, y)\prec\delta,\ x, y\in E\}.$$

於是由定義 3, 存在 $F_0\in\mathfrak{f}$, 使 $F_0\times F_0\subset U\subset V_\delta$, 即

$$F_1\subset F_0,\ F_2\subset F_0\Longrightarrow\sigma(x_{F_1}, x_{F_2})\prec\delta.$$

由 E 的備性, 可知 (x_F) 必斂於 E 中一點 x_0. 於是對每個 $F\in\mathfrak{f}$, $x_0\in\bar{F}$, 從而 $x_0\in A(\mathfrak{f})$.

一般在一致性空間 E 中, 如果 $x_0\in A(\mathfrak{f})$, 而 $\mathfrak{f}$ 是 Cauchy 滲透, 必然 $\mathfrak{f}\to x_0$. 事實上, 設 V 是 E 中一個鄰, 取 W 為 E 中的鄰, 使 $\overset{2}{W}\subset V$. 依 Cauchy 滲透的定義, 存在 $F\in\mathfrak{f}$, 使 $F\times F\subset W$. $W(x_0)$ 既是 x_0 的鄰域, 依 $A(\mathfrak{f})$ 的定義, $W(x_0)\cap F\neq\phi$, 從而存在 $y\in W(x_0)\cap F$. 對於任意 $x\in F$, $(y, x)\in W$, 又 $(x_0, y)\in W$, 從而 $(x_0, x)\in\overset{2}{W}\subset V$. x 既是 F 中任意元, 可知 $F\subset V(x_0)$. 這證明了 $\mathfrak{f}\to x_0$. 回到原來的問題,

可知 $\mathfrak{f} \to x_0$, 即備空間中任意 Cauchy 滲透必收斂於空間中的一點.

2) 設在一致空間 E 中每個 Cauchy 滲透必收斂於 E 中一點; 設 (x_δ) 是 E 中一個基本列. 令 $(S_\delta)_{\delta\in\varDelta}$ 表示列 (x_δ) 的截部滲透基, 而 $\mathfrak{f}$ 表示它所生成的滲透. 對於 E 中任意鄰 U_1 依基本列的定義, 必存在 $\delta_0 \in \varDelta$, 使

$$S_{\delta_0} \times S_{\delta_0} \subset U,$$

從而 $\mathfrak{f}$ 是 Cauchy 滲透. 依假定 $\mathfrak{f}$ 斂於 E 中一點 x_0. 所以對於每個 $V \in \mathfrak{V}(x_0)$, 必存在 $\delta_0 \in \varDelta$, 使 $S_{\delta_0} \subset V$, 這正是說, $\delta \succ \delta_0 \Longrightarrow x_\delta \in V$, 從而 $(x_\delta) \to x_0$. 證明了 E 的備性.

系. 在任意一致空間 E 中, 如果 $\mathfrak{f}$ 是 Cauchy 滲透, 而 $x_0 \in A(\mathfrak{f})$, 那末必然 $\mathfrak{f} \to x_0$.

證. 見定理 3 的證明的第 1 部分.

關於什麽拓撲空間上可以引入一個相符的備一致性結構的問題, 已有很多研究, 請參看:

Dieudonné, J., 1) Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet, C. R. Paris, 209 (1939).

2) Sur les espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet, C. R. Paris, 209 (1939), 666—668.

3) Sur les espaces uniformes complets, Ann. Jc. Éc. norm. sup., 56 (1939), 277—291.

Кагу, Г. Н., Топологические пространства в которых можно ввести полную равномерную структуру, ДАН, 99 (1954), 897—900.

Dickinson, A., Compactness conditions and uniform structures, Amer. J. Math., 75 (1953), 224—228.

§ 3. 緊空間與一致性結構

在前兩節中已經看到, 爲了一個拓撲空間 E 上可賦以一個分離的一致性結構, 使這個一致性結構所引起的拓撲結構與原來的拓撲結構相同, 必須且只須 E 是全正則的 (§ 1 定理 1). 既然全正則空間與 (T_2) 型緊空間的子空間是等價概念, 從而 (T_2) 型緊空間上必可定義一個分離的一致性結構, 使後者在原空間上所引起的拓撲結構就是原來的.

以下, 除特別聲明外, 凡一致性結構都是指分離的.

定義 1. 拓撲空間E叫做可一致化的，是指它上面可賦以一個一致性結構，使這個一致性結構在E上所引起的拓撲結構就是E上原來的拓撲結構．這時，那個一致性結構叫做與原來的拓撲結構相容．

註．由於一致性空間與複距離空間是等價的，可一致化空間也可以叫做可複距離化的空間．特別可一致化空間與全正則空間是等價概念，從而緊(T_2)型空間必是可一致化的．在§1中曾說明，在一集上，不同的一致性結構可以引起相同的拓撲結構，這就是說，可一致化空間的一致性結構不一定由它的拓撲結構一意決定．但對於緊(T_2)型空間，有下列一意性定理．

定理 1. 在一緊(T_2)型空間E上，恰存在一個一致性結構與它的拓撲結構相容．這個一致性結構中的鄰由積空間$E\times E$中對角綫集D的鄰域滲透組成．E上賦以這個一致性結構必是備一致空間．

證．1) 定理的最後部分不難證明．事實上，設$\mathfrak{f}$是E上任意 Cauchy 滲透，依緊(T_2)型空間的一個特徵，$\mathfrak{f}$必具有不空附着：$A(\mathfrak{f})\neq\neq\phi$．而既然$\mathfrak{f}$是 Cauchy 滲透，依§2定理3的系，$\mathfrak{f}$必收斂於一點$x_0\in A(\mathfrak{f})$．這就證明了$E$的完備性．

2) 由於緊(T_2)型空間必是全正則，從而它可以一致化，不待證明．下面只須證明它上面至多有一個與它的拓撲結構相容的一致性結構，而爲此，我們證明，如果$\mathfrak{U}$是這樣一個一致性結構的鄰滲透，那末$\mathfrak{U}$恰是$E\times E$中對角綫集D的鄰域滲透．事實上，對於$\mathfrak{U}$，必存在複距離σ，使$E=E(\sigma,\Delta)$成爲複距離空間，而諸集$V_\delta\equiv\{(x,y)\mid\sigma(x,y)\lneqq\delta\}$是$\mathfrak{U}$的滲透基．注意每個$V_\delta$是$D$的鄰域．實際上，$V_\delta$是含$D$的開集，因爲如果$(x_0,y_0)\in V_\delta$，那末令$\sigma=(\rho_\iota)_{\iota\in J}$，必存在有窮多個標號$\iota_1,\cdots,\iota_n$及正數$\epsilon_k$，使$V_\delta=\{(x,y)\mid\rho_{\iota_k}(x,y)<\epsilon_k(1\leqslant k\leqslant n)\}$，從而$\rho_{\iota_k}(x_0,y_0)<\epsilon_k\ (1\leqslant k\leqslant n)$．於是令

$$\eta_k=\epsilon_k-\rho_{\iota_k}(x_0,y_0)\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

就有

$$\rho_{\iota_k}(x_0,x)<\frac{\eta_k}{2},\ \rho_{\iota_k}(y_0,y)<\frac{\eta_k}{2}\Longrightarrow\rho_{\iota_k}(x,y)\leqslant$$
$$\leqslant\rho_{\iota_k}(x,x_0)+\rho_{\iota_k}(x_0,y_0)+\rho_{\iota_k}(y_0,y)<\epsilon,$$

從而

$$V\left(x_0;\ \varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_n;\ \frac{\eta_1}{2},\ \cdots,\ \frac{\eta_n}{2}\right)\times V\left(y_0;\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_n;\frac{\eta_1}{2},\cdots,\frac{\eta_n}{2}\right)\subset V_\delta.$$

證完了 V_δ 是 $E\times E$ 中開集.

現在證明 D 的在 $E\times E$ 中的任意開鄰域 U 必含一個 V_δ. 否則 $CV\cap V_\delta\neq\phi$ 對每個 $\delta\in\Delta$ 成立. 取 $(x_\delta,\ y_\delta)\in CU\cap V_\delta$, 由於 $E\times E$ 是緊空間, 是向列 $\{(x_\delta,\ y_\delta)\}$ 必有一子定向列收斂於 $E\times E$ 中的一點 $(a,\ b)$. 由於 CU 是閉集,而 $(x_\delta,\ y_\delta)\in CU$, 所以 $(a,\ b)\in CU$, 特別 $a\neq b$, 因為 $D\subset U$; 另一方面, $(a,\ b)\in\bigcap\limits_\delta\overline{V}_\delta$, $\overline{V}_\delta$ 表示 V_δ 在 $E\times E$ 中的閉包,這就是說,對於 a 的任意鄰域 $S(a;\delta)$ 與 b 的任意鄰域 $S(b;\delta)$ 有

$$(S(a;\delta)\ \times\ S(b;\delta))\ \cap\ V_\delta\neq\phi,$$

從而上列不等式左邊的集中含一點 $(x,\ y)$, 於是

$$\sigma(a,b)\leqslant\sigma(a,x)+\sigma(x,y)+\sigma(y,b)\leqslant\delta+\delta+\delta=3\delta.$$

δ 既是任意的,必然 $a=b$, 與上面所得矛盾. 證完.

定理 2. 由一 (T_2) 型緊空間 E 到一一致空間 E_1 中的連續映像必在 E 上一致連續.

證. $g(x,y)\equiv(f(x),\ f(y))(x,\ y\in E)$ 是由 $E\times E$ 到 $E_1\times E_1$ 中的連續映像. 設 $V'_{\delta'}$ 是 E_1 中一個鄰,依定理 1 的證明 1), $V_{\delta'}$ 是 $E_1\times E_1$ 中的開集, 從而 $\overset{-1}{g}(V'_{\delta'})\equiv\{(x,\ y)|x,y\in E,\ \sigma(f(x),\ f(y))\prec\delta'\}$ 是 $E\times E$ 中含對角綫集 D 的開集;而依定理 1 的證明 1), 它必包含一個形如 V_δ 的集, 這正是說,

$$\sigma(x,\ y)\prec\delta\Longrightarrow\sigma(f(x),\ f(y))\prec\delta'.$$

這就證明了 f 的一致連續性.

系. 設 f 是定義在緊 (T_2) 型空間 E 的稠子集 A 上的映像, 而 f 在備分離一致空間 E_1 中取值. 為了能把 f 按連續性延拓到整個 E 上去, 必須且只須 f 在 A 上一致連續.

對於一致空間, 緊性還有新的等價條件.

定理 3. 為了一致空間 E 是緊 (T_2) 型, 必須且只須它是分離且備

的，並且對於每個 $\delta \in \Delta(E=E(\sigma,\Delta))$，必存在有窮多個點 $x_1, \cdots, x_n \in E$，使

$$E=\bigcup_{i=1}^{n} S(x_i;\delta).$$

證．1）必要性．E 的備性由它的緊性得出（定理1）．對於任意 $\delta \in \Delta$，$\{S(x;\delta)|x \in E\}$ 成爲 E 的覆蓋，從而依緊性，必存在有窮多個點 $x_1, \cdots, x_n$，使

$$E=\bigcup_{i=1}^{n} S(x_i;\delta).$$

2）充分性．設 E 是分離備一致性空間，並且滿足定理中的條件．爲了證明 E 是緊的，只須證 $\mathfrak{P}(E)$ 中每個超滲透收斂，而鑒於 E 是備空間，只須證明 $\mathfrak{P}(E)$ 的每個超滲透 $\mathfrak{f}$ 是 Cauchy 滲透．設 $\delta \in \Delta$，那末存在有窮多個點 $x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，使

$$E=\bigcup_{i=1}^{n} S\left(x_i;\frac{\delta}{2}\right).$$

由於超滲透必是素對偶幻，至少有一個 $S\left(x_i;\frac{\delta}{2}\right) \in \mathfrak{f}$，這就是說，存在 $F \in \mathfrak{f}$，使 $F \subset S\left(x_i;\frac{\delta}{2}\right)$，即 $x, y \in F \Longrightarrow \sigma(x, y) \leqslant \sigma(x, x_i)+\sigma(x_i, y)<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta$，從而 $F \times F \subset V_\delta$．這證明了 $\mathfrak{f}$ 是 Cauchy 滲透．

定義 2. 集 A 叫做一致空間 E 的 δ-網（$E=E(\sigma,\Delta)$，$\delta \in \Delta$），是指

$$E=\bigcup_{x \in A} S(x;\delta),$$

換句話說，E 中每個點必距 A 中某點 $<\delta$．一致空間 E 中集 B 叫做全囿，是指對於每個 $\delta \in \Delta$，子空間 B 具有有窮 δ-網．

註．定理 3 說明，爲了一致空間 E 是緊(T_2)型的，必須且只須它是分離的備且是全囿的．

定理 4. 爲了距離空間 E 是列緊的，必須且只須它是緊的．

證． 1）必要性．設 E 是列緊距離空間，那末對於任意自然數，存

在有窮的 $\frac{1}{n}$-網 A_n，於是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是 E 中可數集，並且在 E 中稠；因為對於任意 $\varepsilon>0$，存在自然數 n，使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，從而對於任意 $x\in E$，$\exists x_n\in A_n$，使 $\rho(x, x_n)<\frac{1}{n}<\varepsilon$（$\rho$ 表示 E 上的距離），這正是說明 $x\in\overline{\cup A_n}$，從而 $E=\overline{\cup A_n}$. 今令 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，並考察球族

$$S(a_n; r)\ \ (n=1, 2, \cdots, r\text{ 遍表一切有理數}).$$

於是得一可數球族，而對於 E 中任意點 x 與任意開集 $G\ni x$，x 既是 G 的內點，存在正數 α，使 $S(x, \alpha)\subset G$. $\{a_n\,|\,n\in N\}$ 既在 E 中稠，必存在 a_n 使 $\rho(x, x_m)<\frac{\alpha}{4}$. 取有理數 r，使得 $\frac{\alpha}{4}<r<\frac{\alpha}{2}$，於是

$$x\in S(x_m, r)\subset G(x, \alpha)\subset G.$$

如果 $\{G_\iota\}_{\iota\in J}$ 是 E 的覆蓋，那末對於每個 $x\in E$，依上述存在一個點 x_m 及有理數 r，使 $x\in S(x_m, r)\subset G_\iota\equiv G_{\iota(m,r)}$. 於是這可數多個開集 $\{G_{\iota(m,r)}\,|\,m\in N, r\in Q\}$ 成為 E 的覆蓋．我們把這些開集重排成集列 $\{G_1, G_2, \cdots, G_n, \cdots\}$．如果從諸 G_n 中選不出有窮多個集來形成 E 的覆蓋，那末對於每個 n，$\exists y_n\in E\setminus\bigcup_{k=1}^{n} G_k\,(n=1,2,\cdots)$. 依列緊性的假定，可取出 (y_n) 的一個子列 $(y_{n'})$ 收斂於一點 $y_0\in E$. 設 $G_k\ni x_0$，那末存在自然數 n_0，使得 $n'\geqslant n_0\Longrightarrow y_{n'}\in G_k$，這與 y_n 的定義矛盾．

2）設 E 是緊距離空間，於是依定理 3，E 是全囿的，從而對於每個正數 ε，有一有窮 $\frac{1}{n}$-網 $\{x_1^{(n)}, \cdots, x_{k_n}^{(n)}\}$. 設 (y_n) 是 E 中任意點列，那末，必有一子列 $(y_{n'})$ 屬於同一球 $S(x_{k_1}^{(1)}, 1)$，同理必有一子列 $(y_{n''})$ 屬於同一球 $S\left(x_{k_2}^{(2)}, \frac{1}{2}\right)\subset S(x_{k_1}^{(1)}, 1)$，…．於是取對角列 $(y_n(n))$，使得一基本列．依定理 3，E 是完備的，從而 $(y_n(n))$ 收斂於 E 中一元 y_0，而 E 的列緊性得證．

定義 3. 一致空間叫做準緊，是指它是分離的且它的完備化 $\hat{E}$ 是緊的。一致空間 E 中的子集 A 叫做準緊的，是指 E 的一致子空間 A 是準緊的。

例．設 (x_n) 是分離一致空間 E 中一個平常基本列，那末，(x_n) 是 E 中準緊集，因爲在 E 的完備化 $\hat{E}$ 中，$(x_n)\to x_0\in\hat{E}$，而 $A\equiv\{x_n|_{n=0,1,2,\cdots}\}$ 是 $\hat{E}$ 中緊集．事實上，設 $\{G_\iota\}$ 是 A 的覆蓋，必有一個 $G_{\iota_0}\ni x_0$，而 G_{ι_0} 既是 x_0 的開鄰域，必存在自然數 n_0，使 $n\geqslant n_0\Longrightarrow x_n\in G_{\iota_0}$，而在 G_{ι_0} 外只有有窮多個 A 中的點，從而由 $\{G_\iota\}$ 可以取出有窮多個集組成 A 的覆蓋．

註．在一致空間 E 中，如果閉包爲緊的集叫做相對緊，那末相對緊集 A 必是準緊的，因爲 $\overline{A}$ 是緊集；從而作爲 E 的一致子空間，是備的，而 $\overline{A}$ 同構於 A 的完備化．

反之，準緊集不必是相對緊的．事實上，如果 E 是非緊的準緊集，那末 E 不是相對緊的．

定理 5. 爲了分離一致空間 E 是準緊的，必須且只須它是全圍的．

證．1） E 可以看成是它的完備化 $\hat{E}$ 中的稠集．如果 E 是準緊的，則 $\hat{E}$ 是緊的．對任意 $\delta\in\Delta(\hat{E}=\hat{E}(\sigma,\Delta))$，令（定理 3）

$$\hat{E}=\bigcup_{i=1}^{n}S\left(\hat{x}_i;\frac{\delta}{2}\right).$$

既然 E 在 $\hat{E}$ 中稠，每個 $S\left(\hat{x}_i;\dfrac{\delta}{2}\right)$ 必含 E 中一個點 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$，從而 $x\in E\Longrightarrow\exists\, i(=1,\cdots,n)$，使 $x\in S\left(\hat{x}_i;\dfrac{\delta}{2}\right)$，所以

$$\sigma(x,x_i)\leqslant\sigma(x,\hat{x}_i)+\sigma(\hat{x}_i,x_i)<\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta,$$

於是得知

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}S(x_i;\delta).$$

δ 既是任意的，E 的全圍性得證．

2） 反之，設 E 是全圍的，那末對於每個 $\delta\in\Delta(E=E(\sigma,\Delta))$，存

在有窮多個點 $x_1, \cdots, x_n \in E$，使

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} S_E\left(x_i; \frac{\delta}{2}\right),$$

這裏

$$S_E\left(x_i; \frac{\delta}{2}\right) \equiv \left\{x \mid x \in E, \sigma(x, x_i) \prec \frac{\delta}{2}\right\}.$$

既然E在E的完備化$\hat{E}$中稠，對於每個$\bar{x} \in \hat{E}$，$\exists x \in E$，使

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, x) \prec \frac{\delta}{2},$$

這裏$\bar{\sigma}$表示σ在$\hat{E}$上的延拓（見 §2 定理 1）。於是x必屬於E中某球$S_E\left(x_i; \frac{\delta}{2}\right)$，從而$\sigma(x, x_i) \prec \frac{\delta}{2}$，而

$$\bar{\sigma}(\bar{x}, x_i) \leqslant \bar{\sigma}(\bar{x}, x) + \sigma(x, x_i) \prec \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta;$$

而$\bar{x} \in \hat{E}$既是任意的，可知

$$\hat{E} = \bigcup_{i=1}^{n} S_{\hat{E}}(x_i; \delta).$$

δ既是任意的，完備空間$\hat{E}$也是全囿的，依定理 3，$\hat{E}$是緊的。證完。

定理 6. 在一致空間E中，設A是緊集，B是閉集，而$A \cap B = \phi$，那末必存在$\delta \in \Delta$ $(E = E(\sigma, \Delta))$，使

$$V_\delta(A) \cap V_\delta(B) = \phi,$$

這裏對於集M，$V_\delta(M)$表示M的δ-鄰域：

$$V_\delta(M) \equiv \{x \mid \exists y \in M, \sigma(x, y) \prec \delta\}.$$

證. 如果定理不成立，那末對於每個$\delta \in \Delta$，必存在一點x_δ，使

$$x_\delta \in V_{\frac{\delta}{3}}(A) \cap V_{\frac{\delta}{3}}(B).$$

從而必存在$y_\delta \in A$，$z_\delta \in B$，使

$$\sigma(x_\delta, y_\delta) \prec \frac{\delta}{3}, \quad \sigma(x_\delta, z_\delta) \prec \frac{\delta}{3}.$$

(y_δ) $(\delta \in \Delta)$是緊集A中一個定向列，從而它有一子定向列$(y_{f(\sigma)})_{\sigma \in \Sigma}$，使$y_{f(\sigma)} \to y_0 \in A$。於是對於任意$\delta \in \Delta$，存在$\sigma_0 \in \Sigma$，使$\sigma \prec \sigma_0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sigma(y_0, y_{f(\sigma)}) \prec \frac{\delta}{3}$。$(y_{f(\sigma)})$既是$(y_\delta)$的子定向列，必存在$\sigma_1 \prec \sigma_0$，

使 $\sigma \prec \sigma_1 \Longrightarrow$ 使 $f(\sigma) \prec \delta$. 令 $\delta_2 = f(\sigma_1)$, 於是

$$\sigma(y_0, z_{\delta_2}) \leqslant \sigma(y_0, y_{\delta_2}) + \sigma(y_{\delta_2}, x_{\delta_2}) + \sigma(x_{\delta_2}, z_{\delta_2}) \prec$$
$$\prec \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

$\delta \in \Delta$ 既是任意的, 可知 $y_0 \in \bar{B} = B$, 這與 $A \cap B = \phi$ 的假定矛盾. 證完.

系. 設 A 是一致空間 E 中的緊集, 那末 $\{V_\delta(A) | \delta \in \Delta\}$ 形成 A 的一個基本鄰域組.

證. 設 U 是 A 的任意開鄰域, 於是 $B \equiv CU$ 是閉集, 並且 $B \cap A = \phi$. 依定理 6, $\exists \delta \in \Delta$, 使

$$V_\delta(A) \cap V_\delta(B) = \phi.$$

於是 $V_\delta(A) \cap B = \phi$, 從而 $V_\delta(A) \subset U$. 證完.

下面利用複距離來討論緊空間中連通集的幾個性質.

定義 4. 在一致空間 E 中, 設 $\delta \in \Delta(E = E(\sigma, \Delta))$. E 中有窮點列 $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 叫做 δ-鏈, 是指對於每個 $i = 1, \cdots, n-1$, $\sigma(x_i, x_{i+1}) \prec \delta$; x_1, x_n 叫做 δ-鏈的端點, 這時我們說那個 δ 鏈連接 x_1 與 x_n.

註. 設 $E = E(\sigma, \Delta)$ 是一致空間, 對於每個 δ, 規定 $x \sim y(\mathfrak{R}_\delta)$, 是指存在一個連接 x 與 y 的 δ-鏈, 那末不難看出 $\mathfrak{R}_\delta$ 是 E 中等價關係. 令 A_x^δ 表示按等價關係 $\mathfrak{R}_\delta$ 的含 x 的剩餘類, 那末不難看出

$$y \in A_x^\delta \Longrightarrow S(y; \delta) \subset A_x^\delta,$$

從而 A_x^δ 是 E 中開集. 但 CA_x^δ 是一些剩餘類的併, 從而也是開集, 於是 A_x^δ 也是閉集, 這正是說, E 中能與一定點 x 用 δ-鏈連接的點全體 A_x^δ 是既開且閉的集. 令

$$A_x = \bigcap_{\delta \in \Delta} A_x^\delta.$$

A_x 是按下列等價關係 $\mathfrak{R}$ 的含 x 的剩餘類: $x \sim y(\mathfrak{R})$. 對於每個 $\delta \in \Delta$, 存在一個連接 x 與 y 的 δ-鏈.

定理 7. 在緊(T_2)型空間 E 中, 上面定義的集 A_x 乃是含 x 的連通分, 並且 C_x 也是含 x 的一切既開且閉集的交 O_x.

證. 如果能證明 A_x 是連通的, 那末, 既然含 x 的連通分一定包含

在含 x 的一切既開且閉集中，依前面的註必然包含在 A_x 中，這正是說，

$$A_x \subset C_x \subset O_x \subset A_x,$$

從而這三個集都相等.

如果 A_x 不是連通的，它既然是閉集，必存在 E 中兩不相交閉集 B 與 C，使 $A_x = B \cup C$；依定理6 及 E 的緊性假定，存在 $\delta \in \Delta$，使 $V_\delta(B) \cap V_\delta(C) = \phi$. 令

$$H = C(V_{\frac{\delta}{2}}(B) \cup V_{\frac{\delta}{2}}(C))$$

從而 H 是閉集. 設 $x \in B$，考 C 中一點 y. 如果 L 是連接 x 與 y 的一個 $\frac{\delta}{2}$-鏈，那末 L 必有一點 $\in H$，否則在 L 這個鏈中必存在兩點 $x_i \in V_{\frac{\delta}{2}}(B)$，$x_{i+1} \in V_{\frac{\delta}{2}}(C)$，而 $\sigma(x_i, x_{i+1}) \prec \frac{\delta}{2}$，從而

$$x_{i+1} \in V_\delta(B) \cap V_\delta(C).$$

與上面所述矛盾. 既然依 A_x 的定義，x 與 y 可以用一個 $\frac{\delta}{2}$-鏈連接起來，那末 $H \cap A_x^\delta \neq \phi$. 但如果 $\delta' \leqslant \delta$，那末 $A_x^{\delta'} \subset A_x^\delta$，從而當取 $x_\delta \in H \cap A_x^\delta$ 時，(x_δ) 是定向列；依 A_x^δ 的閉性及 E 的緊性，(x_δ) 有一子定向列收斂於一點 x_0，從而 $x_0 \in H \cap A_x^\delta$ 對每個 $\delta \in \Delta$ 成立，即 $x_0 \in H \cap A_x$. 與 H 的定義矛盾. 證完.

系. 設 E 是全斷局部緊(T_2)型空間. 對於每個 $x \in E$，包含 x 的一切既開且閉集的全體形成 x 的一個基本鄰域組.

證. 設 V 是 x 的一個相對緊的開鄰域；設 F 是 V 的邊緣：

$$F = \overline{V} \cap \overline{CV} = \overline{V} \cap CV;$$

設 $U \subset \overline{V}$ 是子空間 $\overline{V}$ 中一個既開且閉集，那末 U 在 E 中是閉的. 如 U 與 F 不相交，那末 $U = U \cap \overline{V} = U \cap \overline{V} \cap (V \cup CV) = (U \cap V) \cup (U \cap F) = U \cap V$，這就是說 $U \subset V$，從而 U 是 E 中開集. 因此，為了證明定理，只須證明在 $\overline{V}$ 中存在一個子空間 $\overline{V}$ 中的既開且閉集 U，使 $U \ni x$ 且 $U \cap F = \phi$. 如 $F = \phi$，沒有需要證明的. 設 $F \neq \phi$，F 是緊集，從而子空間 $\overline{V}$ 中包含 x 的既開且閉集都是緊集，這些緊集形成一個滲透基，從而這些集的交與 F 相交. 設 $y(\in E)$ 是其中一點，那末 $\overline{V}$ 既是全斷

緊空間，依定理 7，x 在 $\bar{V}$ 中的一切既開且閉鄰域的交只含 x 單一個點，與 y 的存在矛盾．證完．

定理 8． 設 E 是緊(T_2)空間，$\mathfrak{R}$ 是 E 上一個等價關係，使 $x \sim y(\mathfrak{R})$ 表示 x 與 y 屬於 E 的同一個連通分．於是商空間 $E/\mathfrak{R}$ 是緊 (T_2) 型全斷的．

證．依第一章 §5 定理 11，$E/\mathfrak{R}$ 是全斷的．今只須證明 $E/\mathfrak{R}$ 是 (T_2) 的．設 A, B 是 E 中兩個不同連通分，依定理 7，存在 $\delta \in \Delta$，使 A 中任意一點與 B 中任意一點不能用 δ-鏈在 E 中相連接．

但 E 中能用一 δ-鏈與 A（或 B）中一點相連接的點的全體 H（與 K）是 E 中既開且閉集（定理 7 前的註），從而按等價關係 $\mathfrak{R}$ 是飽和的．於是 H, K 各是 A, B 的開鄰域，按 $\mathfrak{R}$ 都是飽和的，且不相交．定理得證．

下面幾個定理對於後面（距離化問題）是有用的．

定義 5． 拓撲空間 E 中一個子集族 $\mathfrak{A}$ 叫做散的，是指對於每個 $x \in E$，$\exists V \in \mathfrak{B}(x)$，使 V 只與 $\mathfrak{A}$ 中至多一個集相交．集族 $\mathfrak{A}$ 叫做 σ-散，是指它是可數多個散集的併．

定理 9． 對於賦擬距離的空間 E 的每個開覆蓋 $\mathfrak{U}$ 必存在一個 σ-散的開集族 v，使 v 是 E 的覆蓋，並且 v 從屬於 $\mathfrak{U}$．

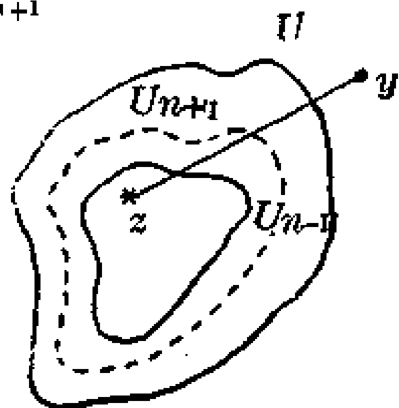
證．設 ρ 是 E 上的擬距離．對每個正整數 n 與每個 $U \in \mathfrak{U}$，令

$$U_n = \left\{x \mid x \in U,\ \rho(x, E \setminus U) \geqslant \frac{1}{2^n}\right\}.$$

於是對於任意 $z \in U_n$ 與 $y \notin U_{n+1}$，如適當取 $x \in E \setminus U$，必然

$$\rho(z, y) \geqslant \rho(z, x) - \rho(y, x) \geqslant \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}},$$



因為 $\rho(E \setminus U, U_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}$．從而可取 $x \in E \setminus U$，使 $\rho(y, x) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$．

今把 $\mathfrak{U}$ 按某種方式良序，相應的序關

係表示成 $\prec$. 對於每個自然數 n 與 $U\in\mathfrak{U}$, 使

$$U_n^* = U_n \setminus \cup\{W_{n+1} \mid W\in\mathfrak{U},\ W\prec U\}.$$

對於 $U, V\in\mathfrak{U}$, 如果 $V\prec U$, 必然 $U_n^*\subset E\setminus V_{n+1}$. 從而依上述

$$\rho(U_n^*, V_n^*) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}.$$

令

$$U_n^+ = \left\{x \,\middle|\, \rho(x, U_n^*) < \frac{1}{2^{n+3}}\right\},$$

那末, 當 $V\prec U$ 時, 對於 $x\in U_n^+$, $y\in V_n^+$, 取適當 $z\in U_n^*$, 使得 $\rho(x, z) < \frac{1}{2^{n+3}}$; 於是因 $U_n^*\subset E\setminus V_{n+1}$, 取 $u\in V_n^*\subset V_n$,

$$\rho(y, z) \geqslant \rho(z, u) - \rho(u, y) \geqslant \rho(E\setminus V_{n+1}, V_n) - \\ - \frac{1}{2^{n+3}} \geqslant \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+3}},$$

所以

$$\rho(x, y) \geqslant \rho(y, z) - \rho(z, x) \geqslant \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+3}}\right) - \frac{1}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^{n+3}}.$$

從而

$$\rho(U_n^+, V_n^+) \geqslant \frac{1}{2^{n+2}}.$$

這說明對於每個固定的 n, $\{U_n^+ \mid U\in\mathfrak{U}\}$ 是散族. 令

$$v = \{U_n^+ \mid U\in\mathfrak{U},\ n\in N\}.$$

對於每個 $x\in E$, 設 U 是按次序 $\prec$ 的 $\mathfrak{U}$ 中第一個集 $\ni x$, 那末

$W\in\mathfrak{U}$, $W\prec U \Longrightarrow W\not\ni x$, 而因 $W_{n+1}\subset W$, 所以 $W_{n+1}\not\ni x$.

因此, $U_n^*\ni x$, $U_n^+\ni x$, 而且依定義 U_n^+ 是開集. 由定義不難看出 $U_n^+\subset U$, 從而 v 成爲 E 的 σ-散開覆蓋, 並且 v 從屬於 $\mathfrak{U}$.

定理 10. 賦擬距離的空間必是仿緊的.

證. 首先注意, 依定理 9, 對於賦擬距離的空間 E 的每個開覆蓋 $\mathfrak{U}$, 必存在一個 σ-散的開覆蓋 v, 使 v 從屬於 $\mathfrak{U}$. 由於散族必是局部有窮族, 從而 σ-散開覆蓋必是一個由可數多個局部有窮族組成的開覆蓋. 於是剩下的乃是證明下列命題:

如果對拓樸空間 E 的每個開覆蓋 $\mathfrak{U}$, 必可找到一個由可數多個局

部有窮族組成的開覆蓋 v 從屬於 $\mathfrak{U}$，那末也必可找到一個局部有窮開覆蓋從屬於 $\mathfrak{U}$.

設 $v=\bigcup_{n=1}^{\infty} v_n$，$v_n$ 是局部有窮開集族. 對於每個 n 與每個集 $V\in v_n$，令

$$V^*=V\setminus\bigcup\{U\mid U\in v_k,\ 1\leqslant k<n\}.$$

令 $w=\{V^*\mid V\in v_n,\ n\in N\}$. 由於 $V^*\subset V$，從而 w 從屬於 v. 對於每個 $x\in E$，依 v 的定義，必存在自然數 n 及一個 $V\in v_n$，使 $x\in V$. 設 n 取成滿足上述條件最小的數，於是

$$U\in v_k(k<n)\Longrightarrow x\notin U,\ 所以\ V^*\ni x.$$

因此 w 是 E 的覆蓋；w 是局部有窮的. 事實上，對於每個 $x\in E$，取 V 如上，$x\in V$，於是對於 $m>n$，對於任意 $w\in v_m$，由於

$$W^*=W\setminus\bigcup\{U\mid U\in v_k,\ k\leqslant m\},$$

所以 $W^*\cap V=\phi$，這就是說，V 至多只與滿足 $1\leqslant k\leqslant m$ 的諸 v_k 中的集相交；而由於每個 v_k 的局部有窮性，可知 V 只與 w 中有窮多個集相交. 但 V 是開集，從而是 x 的鄰域，於是 w 的局部有窮性證完.

§4. 一致性空間的積空間

設 $E_1=E_1(\sigma_1,\Delta)$ 是一致性空間，E 是任意集，f 是由 E 到 E_1 中的映像；定義 $\sigma(x,y)\equiv\sigma_1(f(x),f(y))$，那末 σ 成爲 E 上一個複擬距離. 如果 E 上賦以複擬距離 σ，f 成爲 E 到 E_1 中的一致連續映像. 令

$$V_\delta\equiv\{(x,y)\mid x,y\in E,\ \sigma(x,y)\prec\delta\},$$

$$V_\delta^{(1)}\equiv\{(u,v)\mid u,v\in E_1,\ \sigma_1(u,v)\prec\delta\},$$

那末 $(x,y)\in V_\delta\Longleftrightarrow(f(x),f(y))\in V_\delta^{(1)}$. 如果 E 上有一一致性結構，其鄰滲透比由諸 V_δ 產生的滲透真粗，那末 f 就不能成爲由 E 到 E_1 中的一致連續映像了. 從而 σ 在 E 上所引起的乃是使 f 一致連續的最粗一致性結構.

更一般些，設 E 是任意集，(E_ι) $(\iota\in J)$ 是一族一致性空間，$(\rho_K^{(\iota)})$ $(K\in J_\iota,\ \iota\in J)$ 是決定 E_ι 的一致性結構的擬距離族；設 f_ι 是由 E 到

E_ι 中的一個映像，那末，令

$$\tilde{\rho}_\kappa^{(\iota)}(x, y) = \rho_\kappa^{(\iota)}(f_\iota(x), f_\iota(y)) \quad (x, y \in E),$$

$(\tilde{\rho}_\kappa^{(\iota)})$ $(\kappa \in J_\iota, \iota \in J)$ 成爲 E 上一個擬距離族. 這個族在 E 上決定一個一致性結構，使 f_ι 成爲由一致性空間 E 到 E_ι 中的一致連續映像、並且不難看出，是使每個 f_ι 各是由 E 到 E_ι 的一致連續映像的最粗一致性結構. 這個一致性結構中的鄰由下列集組成：

$$V(\iota_1, \cdots, \iota_\nu; \kappa_1, \cdots, \kappa_\nu; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\nu) \equiv$$
$$\equiv \{(x, y) \mid \rho_{\kappa_h}^{\iota_h}(f_{\iota_h}(x), f_{\iota_h}(y)) < \varepsilon_h \ (1 \leqslant h \leqslant \nu)\}, \quad (1)$$

這裏 $\{\iota_1, \cdots, \iota_\nu\}$ 遍表 J 的一切有窮子集，$\kappa_h \in J_{\iota_h}$ $(1 \leqslant h \leqslant \nu)$.

爲了上述 E 上的一致性結構是分離的，必須且只須對於任意兩個元 $x, y, x \neq y$，必存在一個 $\iota \in J$ 及一個 $\rho_\kappa^{(\iota)}$ $(\kappa \in J_\iota)$，使

$$\rho_\kappa^{(\iota)}(f_\iota(x), f_\iota(y)) \neq 0.$$

如果諸 E_ι 都是分離的，那末，爲了 E 上的上述一致性結構是分離的，必須且只須對於 E 中任意兩個不同元 x, y，必存在 $\iota \in J$，使 $f_\iota(x) \neq f_\iota(y)$. 這時，我們稱映像族 (f_ι) $(\iota \in J)$ 爲 E 上的分離族.

E 上使一切 f_ι 爲一致連續的最粗一致性結構在 E 上所定義的拓撲結構，也恰是使一切 f_ι 爲連續的最粗拓撲結構，因爲這個拓撲結構中點 $x_0 \in E$ 的基本鄰域組由下列集構成：

$$V(x_0; f_{\iota_1}, \cdots, f_{\iota_n}; \kappa_1, \cdots, \kappa_n; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \equiv$$
$$\equiv \{x \mid \rho_{\kappa_h}^{\iota_h}(f_{\iota_h}(x), f_{\iota_h}(x_0)) < \varepsilon_h \ (1 \leqslant h \leqslant n)\} \equiv$$
$$\equiv \bigcap_{h=1}^{n} \overset{-1}{f}_{\iota_h}(V(f_{\iota_h}(x_0); \rho_{\kappa_h}^{\iota_h}; \varepsilon_h)), \quad (2)$$

這裏

$$V(f_{\iota_h}(x_0); \rho_{\kappa_h}^{(\iota_h)}; \varepsilon_h) \equiv \{y \mid y \in E_{\iota_h}, \rho_{\kappa_h}^{(\iota_h)}(y, f_{\iota_h}(x_0)) < \varepsilon_h\}.$$

事實上，當 κ_h 遍表 J_{ι_h} 中的元，ε_h 遍表一切正數時，$V(f_{\iota_h}(x_0); \rho_{\kappa_h}^{(\iota_h)}; \varepsilon_h)$ 形成一致空間 E_{ι_h} 中點 $f_{\iota_h}(x_0)$ 的一個完全鄰域組的基，從而諸 $V(x_0; f_{\iota_1}, \cdots, f_{\iota_n}; \kappa_1, \cdots, \kappa_n; \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 在 E 上所定義的拓撲結構乃是使每個 f_ι 爲連續的最粗拓撲結構. (2) 中鄰域恰是由 (1) 中一致結構所定義的.

根據上述一般原則，我們可以定義一族一致性空間的積。

定義 1. 設 (E_ι) $(\iota\in J)$ 是一族一致性空間，在積集 $E\equiv\prod_{\iota\in J}E_\iota$ 上的積一致性結構，乃是指使每個投影 $f_\iota:(x_\iota)\to x_\iota(\iota\in J)$ 爲一致連續的最粗一致性結構。E 上賦以這個積一致性結構時叫做諸一致性空間 E_ι 的積一致性空間，而 E_ι 叫做這個積一致性空間的因子空間。

註．依上述，E 上由積一致性結構所定義的拓撲結構恰是諸因子空間 E_ι 的拓撲結構的積。不難看出，爲了積一致性結構是分離的，必須且只須諸 E_ι 上的一致性結構都是分離的（見第一章）。

定理 1. 設 E 是一致性空間，$E_1=\prod_{\iota\in J}E_\iota$ 是一致性空間的積，$f=(f_\iota)$ 是由 E 到 E_1 中的映像。爲了 f 是一致連續的，必須且只須對於每個 $\iota\in J$，f_ι 是由 E 到 E_ι 中的一致映像。

證．必要性由積一致性結構的定義及§1 定義 4 下註 3 直接看出。今證充分性，設 $(\rho_\kappa^{(\iota)})$ $(\kappa\in J_\iota)$ 是 E_ι 上決定 E_ι 上一致性結構的擬距離族；設 $(\rho_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$ 是 E 上決定它的一致性結構的擬距離族。E_1 中任意鄰可以表示成（見(1)）：

$$V(\iota_1,\cdots,\iota_m;\kappa_1,\cdots,\kappa_m;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m).$$

爲了使

$$(f(x),f(y))\in V(\iota_1,\cdots,\iota_m;\kappa_1,\cdots,\kappa_m;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m),$$

必須且只須對每個 $\iota_k(1\leqslant k\leqslant m)$，

$$(f_{\iota_k}(x),f_{\iota_k}(y))\in V^{(\iota_k)}(\kappa_k;\varepsilon_k),$$

即

$$\rho_{\kappa_k}^{(\iota_k)}(f_{\iota_k}(x),f_{\iota_k}(y))<\varepsilon_k.$$

但既然 f_{ι_k} 是一致連續的，存在 E 中一個鄰

$$V_k\equiv V(\lambda_1^{(k)},\cdots,\lambda_{n_k}^{(k)};\eta_1^{(k)},\cdots,\eta_{n_k}^{(k)}),$$

使

$$(x,y)\in V_k\Longrightarrow(f_{\iota_k}(x),f_{\iota_k}(y))\in V^{(\iota_k)}(\kappa_k,\varepsilon_k),\ 1\leqslant k\leqslant m.$$

於是由於 E 中鄰滲透的性質，存在一個鄰

$$V\equiv V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n;\eta_1,\cdots,\eta_n)\subset\bigcap_{k=1}^m V_k,$$

使

$$(x,y)\in V\Longrightarrow(f(x),f(y))\in V(\iota_1,\cdots,\iota_m;K_1,\cdots,K_m;\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m).$$

證完.

註. 不難看出,一致空間的積是締合的,即設

$$J_K=\bigcup_{\kappa\in K}J_\kappa,\quad K_1\neq K_2\Longrightarrow J_{K_1}\cap J_{K_2}=\phi.$$

設 $G_k=\prod_{\iota\in J_K}E_\iota$, 那末, 命 $x^{(K)}=(x_\iota)_{\iota\in J_k}$, $x=(x_\iota)$ $(\iota\in J)$, $x\to$ $\to(x^{(K)})_{\kappa\in K}$ 是由 ΠE_ι 到 $\prod_{\kappa\in K}G_\kappa$ 上的同構. 又如 A_ι 是 E_ι 的子空間, 那末諸一致性空間 A_ι 的積與 ΠE_ι 中的子空間 ΠA_ι 同構.

定理 2. 設 f 是由積一致性空間 $E_1\times E_2$ 到一致性空間 E_0 中的一致連續映像, 那末"部分映像" $y\to f(x,y)$ 是由 E_2 到 E_0 中的一致連續映像.

證. 事實上,對於固定的 $x\in E_1$, $y\to(x,y)$ 是由 E_2 到 $E_1\times E_2$ 中的一致連續映像.

註. 這就是說, 按兩個變量一致連續的映像一定按每個變量分別一致連續. 正如連續映像的情形一樣,逆命題不成立.

定理 3. 爲了積一致性空間 $E=\prod_{\iota\in J}E_\iota$ 中點定向點列 $(x_\alpha)\equiv(x_\alpha^{(\iota)})$ $(\alpha\in A,\iota\in J)$ 是基本列,必須且只須對每個 $\iota\in J$, $(x_\alpha^{(\iota)})$ 是 E_ι 中的基本列.

證. 爲了 (x_α) 是 E 中基本列, 必須且只須對於每有窮多個標號 $\iota_1,\cdots,\iota_n$ 及相應的擬距離 $\rho_{\kappa_k}^{(\iota_k)}(1\leqslant k\leqslant n)$($\rho_\kappa^{(\iota)}(\kappa\in J_K)$表示定義 E_ι 的一致性結構的擬距離),與正數 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$, 存在標號 α_0, 使

$$\alpha,\alpha'\succ\alpha_0\Longrightarrow\tilde{\rho}_{\kappa_i}^{(\iota_i)}(x_\alpha,x_{\alpha'})<\varepsilon_i\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

但這個條件按積空間的定義等價於下列條件: 對任意 $\iota_1,\cdots,\iota_n$, $\rho_{\kappa_k}^{(\iota_k)}(1\leqslant k\leqslant n)$ 及正數 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$, 存在標號 α_0, 使

$$\alpha,\alpha'\succ\alpha_0\Longrightarrow\rho_{\kappa_i}^{(\iota_i)}(x_\alpha^{(\iota_i)},x_{\alpha'}^{(\iota_i)})<\varepsilon_i\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

而這又等價於存在 α_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, 使

$$\alpha,\alpha'\succ\alpha_i\Longrightarrow\rho_{\kappa_i}^{(\iota_i)}(x_\alpha^{(\iota_i)},x_{\alpha'}^{(\iota_i)})<\varepsilon_i\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

因爲A是定向集．最後一條件正意味着$(x_\alpha^{(\iota)})$是E_ι中的基本列．證完．

定理 4. 爲了分離一致性空間E_ι的積空間$\Pi E_\iota \equiv E$是備的，必須且只須每個E_ι是備的．

證．因爲在積空間中點列$(x_\alpha) = (x_\alpha^{(\iota)})_{\iota\in J}$收斂的必要充分條件乃是每個坐標列$(x_\alpha^{(\iota)})$在$E_\iota$中收斂，從而充分性不待證．必要性也不難看出，因爲依定理1後的註，每個E_ι同構於E的一個閉子空間，從而是備的．

系． 設$E = \prod_{\iota\in J} E_\iota$是分離一致性空間$E_\iota$的積，$E$的完備化$\hat{E}$必同構於諸$E_\iota$的完備化$\hat{E}_\iota$的積．

證．把E_ι等同於其完備化$\hat{E}_\iota$的一個稠子集，那末$E = \prod_{\iota\in J} E_\iota$在$\prod_{\iota\in J}\hat{E}_\iota$中也是稠集（第一章§2定理8）．由於完備化除同構外的一意性，命題得證．

定理 5. 設(E_ι)是一族準緊(T_2)型空間，對每個ι，f_ι是由E到E_ι中的映像，在E上賦以使每個f_ι爲一致連續的最粗一致性結構．設(f_ι)構成E上一個分離映像族，那末一致性空間E也是準緊的．

證．由本節開始處的說明可知E是(T_2)型空間．依§3定理5，只須證明E是全囿的．設$(\rho_K^{(\iota)})$是定義在E_ι上的一致性結構的擬距離族，那末

$$\tilde{\rho}_K^{(\iota)}(x, y) \equiv \rho_K^{(\iota)}(f_\iota(x), f_\iota(y)) \quad (x, y\in E)$$

是決定E上使每個f_ι爲一致連續的最粗一致性結構的擬距離族．令$\sigma(x, y) \equiv (\tilde{\rho}_K^{(\iota)}(x, y))\ (\kappa\in J_K, \iota\in J)$表由$(\tilde{\rho}_K^{(\iota)})$決定的複距離，從而$E = E(\sigma, \varDelta)$．取任意$\delta\in\varDelta$，於是

$\delta = (z_K^\iota)$，其中只有窮多個$z_{\kappa_1}^{(\iota_1)}, \cdots, z_{\kappa_n}^{(\iota_n)}$是有窮數，

從而

$$S(y;\delta) \equiv \{x \mid \tilde{\rho}_{\kappa_k}^{(\iota_k)}(y, x) < \epsilon_k \quad (1\leqslant k\leqslant n), x\in E\}$$

既然E_{ι_k}是準緊的，存在有窮多個點$x_1^{(k)}, \cdots, x_{n_k}^{(k)}\in E_{\iota_k}$，使

$$E_{\iota_k} = \bigcup_{i=1}^{n_k} V\left(x_i^{(k)}; \rho_{\kappa_k}^{(\iota_k)}; \frac{\epsilon_k}{2}\right).$$

對於每個 $x\in E$, $f_{\iota_k}(x)\in E_{\iota_k}$, 從而 $\exists x_{i_k}^{(k)}$ $(1\leqslant i_k\leqslant n_k)$,使

$$\rho_{\kappa_k}^{(\iota_k)}(x_{\iota_k}^{(k)}, f_{\iota_k}(x)) < \varepsilon_k/2.$$

取 $y_\iota^{(k)}\in E\cap V\left(x_\iota^{(k)}, \tilde{\rho}_{\kappa_k}^{(\iota_k)}, \frac{\varepsilon_k}{2}\right)$,如果這集不空,否則就略去集 $V\left(x_\iota^{(k)}, \tilde{\rho}_{\kappa_k}^{(\iota_k)}, \frac{\varepsilon_k}{2}\right)$, 於是

$$E = \bigcup_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_k\\ 1\leqslant k\leqslant n}} S(y_i^{(k)}, \delta).$$

證完.

系. 準緊(T_2)型空間的積空間仍是準緊(T_2)型的.

§ 5. 距離化問題

距離空間無論從一致性結構或從拓撲結構來說,都是最簡單的. 因此發生這樣的問題,即是否給定一個一致性空間或拓撲空間,它的一致性結構與拓撲結構是否可以用一個距離來決定. 這個問題叫做距離化問題,而熟知實變數函數的點點收斂是不可能距離化的. 最早的拓撲空間距離化條件曾在 1923 年由蘇聯學者 Александров 與 Урысом 給出,其後很多學者作了改進,比較最好的條件乃是 1951 年 Ю. Смирнов 所給出的. 本節將着重敍述這個條件, 並指出這個條件與其它幾個條件的關聯.

定義 1. 所謂集 E 上的一個距離與 E 上的一致性結構 $\mathfrak{U}$ 是符合的, 是指由那個距離所決定的一致性結構恰等於那個一致性結構 $\mathfrak{U}$. 集 E 上一致性結構 $\mathfrak{U}$ 叫做可距離化,是指在 E 上存在一個距離 ρ,使 ρ 與 $\mathfrak{U}$ 符合. 一致性空間叫做可距離化, 是指它上面的一致性結構是可距離化的.

例. 在 $[0, 1]$ 上實值連續函數所組成的集合 C 中,令

$$U_\varepsilon = \{(x, y) \mid t\in[0, 1] \Longrightarrow |x(t)-y(t)| < \varepsilon\},$$

那末 $\{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ 是一致性結構的滲透基; 而這個一致性結構是可距離化的,因爲取距離

$$\rho(x, y) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$$

就可以了.

定理 1. 爲了一個一致性結構是可距離化的，必須且只須它是分離的並且這個一致性結構的滲透有可數基.

證. 必要性. 對於距離空間，如果 ρ 是相應距離，只須取

$$V_{\frac{1}{n}} \equiv \left\{(x, y) \middle| \rho(x, y) < \frac{1}{n}\right\} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

作爲一致性結構的滲透基.

充分性. 由 §1 定理 3 的證明直接看出.

系. 由可數的距離族所定義的分離一致性結構必是可距離化的.

證. 設 (ρ_n) 是所給的可數距族，那末

$$V_{n,m} \equiv \left\{(x, y) \middle| \rho_n(x, y) \leqslant \frac{1}{m}\right\}$$

是一致性結構的滲透基，從而依定理 1，一致性結構是可距離化的.

定義 2. 集 E 上一個距離 ρ 叫做與 E 上的拓撲結構 τ 符合，是指由 ρ 決定的拓撲結構與 τ 相同. 拓撲空間叫做可距離化，是指存在一個與它的拓撲結構相符合的距離.

註. 在 §1 中已經看到決定同一一致結構的距離可能決定出不同的拓撲結構來.

定理 2 (Смирнов, Ю.). 爲了拓撲空間 E 是可距離化的，必須且只須它是正則的並且其中存在可數多個局部有窮覆蓋；這些覆蓋的併形成 E 的基.

證. 1) 必要性. 首先，距離空間必是正則的. 對每個自然數 n，

$$U_n \equiv \left\{S\left(x; \frac{1}{n}\right) \middle| x \in E\right\}$$

是 E 的開覆蓋. 而依 §3 定理 10，E 是仿緊的，從而存在局部有窮覆蓋 $\mathfrak{U}_n$，$\mathfrak{U}_n$ 從屬於 v_n，這正是說，$\mathfrak{U}_n$ 的每個集的直徑 $< \frac{1}{n}$. 於是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}_n$ 形成 E 的基. 證完.

2) 充分性. 設正則空間 E 中有可數多個局部有窮開覆蓋 $\mathfrak{U}_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，使 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}_n$ 是 E 的基. 今證 E 是可賦距離的. 證明依

照 Смирнов，分下列幾個步驟：

(i) $\mathfrak{U}_n$ 的任意多集的閉包的併等於它們併的閉包．設 $U_\iota \in \mathfrak{U}_n$ $(\iota \in J)$，則

$$\bigcup_{\iota \in J} \overline{U}_\iota = \overline{\bigcup_{\iota \in J} U_\iota}.$$

事實上，左邊集包含在右邊集之中，這是不待證的．反之，設 x 是右邊集中一元，於是對每個 $V_0 \in \mathfrak{V}(x)$，

$$V_0 \cap \bigcup_{\iota \in J} U_\iota \neq \phi;$$

而由於 $\mathfrak{U}_n$ 是局部有窮的，存在有窮多個標號 $\iota_1, \cdots, \iota_n \in J$，使

$$\iota \in J,\ \iota \neq \iota_1, \cdots, \iota_n \Longrightarrow V_0 \cap U_\iota = \phi.$$

因 $\{V \cap V_0 \mid V \in \mathfrak{V}(x)\}$ 是 x 的基本鄰域組，從而

$$x \in \overline{\bigcup_{k=1}^{n} U_{\iota_k}} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{\iota_k} \subset \bigcup_{\iota \in J} \overline{U}_\iota.$$

證完．

(ii) 空間 E 是正規的．取 E 中兩互不相交閉集 A, B．對於每個點 $x \in A$，取 x 的一個鄰域 $U_{n(x),\alpha(x)} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}_n \equiv \mathfrak{B}$ (= 空間 E 的一個基)，使

$$\overline{U}_{n(x),\alpha(x)} \cap B = \phi.$$

由於空間的正規性這是可能的．對於每個 $y \in B$，同樣可取 y 的一個鄰域，$U_{n(y),\alpha(y)} \in \mathfrak{B}$，使

$$\overline{U}_{n(y),\alpha(y)} \cap A = \phi.$$

於是

$$A \subset \bigcup_{x \in A} U_{n(x),\alpha(x)} \equiv G_n,\quad B = \bigcup_{y \in B} U_{n(y),\alpha(y)} \equiv H_n.$$

依 (i)，

$$\overline{G}_n = \bigcup_{x \in A} \overline{U}_{n(x),\alpha(x)},\quad \overline{H}_n = \bigcup_{y \in B} \overline{U}_{n(y),\alpha(y)},$$

從而依 $U_{n(x),\alpha(x)}$，$U_{n(y),\alpha(y)}$ 的取法，

$$\overline{G}_n \cap B = \phi,\quad \overline{H}_n \cap A = \phi,\quad (n = 1, 2, \cdots).$$

令

$$U_n \equiv G_n \diagdown \bigcup_{k \leqslant n} \overline{H}_k,\quad V_n \equiv H_n \diagdown \bigcup_{k \leqslant n} \overline{G}_k,$$

那末

$$U \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n, \quad V \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

是開集,並且 $A \subset U$, $B \subset V$;而因對於 $m \geqslant n$,

$$U_m \cap V_n \subset C\overline{H}_n \cap H_n = \phi, \quad \text{同理 } U_n \cap V_m = \phi,$$

從而 $U \cap V = \phi$. E 的正規性得證.

(iii) E 中每個開集必是 F_σ 型的. 設 G 是 E 中任意開集. E 既是正規的,對於每個 $x \in G$, 存在一個含 x 的開集 $U_{n(x),\alpha(x)} \in \mathfrak{B}$, 使

$$\overline{U}_{n(x),\alpha(x)} \subset G.$$

令

$$G_n = \bigcup_{x \in G} U_{n(x),\alpha(x)}.$$

依 (i),

$$\overline{G}_n = \bigcup_{\substack{x \in G \\ n(x)=n}} \overline{U}_{n(x),\alpha(x)}, \quad G \subset \bigcup_{x \in G} U_{n(x),\alpha(x)} \subset$$

$$\subset \bigcup_{x \in G} \overline{U}_{n(x),\alpha(x)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n \subset G,$$

從而

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n$$

是 F_σ 型的. 由 (ii), (iii) 得知 E 是完正規空間.

(iv) E 同胚於權爲 τ 的實 Hilbert 空間[1] $\mathfrak{H}^\tau$ 的子集,這裏 τ 表示上述基 $\mathfrak{B}$ 的勢. 實際上,取

$$\Omega \equiv \{\omega \mid \omega = (n, \alpha), n \in N, \alpha \in J_n\},$$

這裏 J_n 表示集族 $\mathfrak{U}_n$ 的標號族:

$$\mathfrak{U}_n = \{U_{n,\alpha} \mid \alpha \in J_n\}.$$

E 既是正規的,並且 E 中開集必是 F_σ 型的,依第二章 §4 定理 2, 存在 E 上連續實值函數 $p_{n,\alpha}(x)$, 使

1) 實 Hilbert 空間在這裏是指一切滿足條件 $\sum_{\omega \in \Omega} \xi_\omega^2 < +\infty$ (從而只有可數多個 $\xi_\omega \neq 0$) 的實數族 $x \equiv (\xi_\omega)(\omega \in \Omega)$ 的全體,其上距離定義成

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{\omega \in \Omega} (\xi_\omega - \eta_\omega)^2}, \quad y = (\eta_\omega).$$

$$x \in E \Longrightarrow 0 \leqslant p_{n,\alpha}(x) \leqslant 1,$$
$$x \notin U_{n,\alpha} \Longleftrightarrow p_{n,\alpha}(x) = 0.$$

$\mathfrak{U}_n$ 既是局部有窮覆蓋，在每個點 $x_0(\in E)$ 處，對於固定的 n，有有窮多個(並且至少有一個) $p_{n,\alpha}(x_0) \neq 0$. 於是對於固定的 n,

$$\sum_{\alpha \in J_n} (p_{n,\alpha}(x))^2$$

是有意義的，並且是定義在整個空間 E 上的正值連續函數. 於是

$$q_{n,\alpha}(x) \equiv \frac{p_{n,\alpha}(x)}{\sqrt{\sum_{\alpha \in J_n} (p_{n,\alpha}(x))^2}}$$

是定義在整個空間 E 上的連續函數，並且

$$\sum_{\alpha \in J_n} (q_{n,\alpha}(x))^2 \equiv 1,$$

$x, y \in E \Longrightarrow \sum_{\alpha \in J_n} (q_{n,\alpha}(x) - q_{n,\alpha}(y))^2 \leqslant 4$. 令

$$\xi_\omega(x) \equiv \xi_{n,\alpha}(x) \equiv \frac{1}{2^n} q_{n,\alpha}(x),$$

於是

$$\sum_{\omega \in \Omega} (\xi_\omega(x))^2 = \sum_n \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha \in J_n} (q_{n,\alpha}(x))^2 = \sum_n \frac{1}{2^n} = 1,$$

從而對於每個固定的 $x \in E$, $\{\xi_\omega(x)\}_{\omega \in \Omega}$ 是 $\mathfrak{Y}^\tau \equiv l^2(\tau)$ 中一個點，表示成 $\varphi(x)$. 這個 φ 可以看成是由 E 到 $\varphi(E)$ $(\subset \mathfrak{Y}^\tau)$ 上的映像.

φ 是一對一的. 如果 $x, y \in E$, $x \neq y$，那末由於 $\mathfrak{B}$ 是基，並且 E 是正則的，從而是 (T_1) 型的；必存在自然數 n 與 $U_{n,\alpha} \in \mathfrak{U}_n$, 使

$$x \in U_{n,\alpha}, \quad y \notin U_{n,\alpha},$$

從而對於 $\omega \equiv (n, \alpha)$, $\xi_\omega(x) > 0$, $\xi_\omega(y) = 0$, 即有 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

φ 是連續映像. 設 $x \in E$, $\varepsilon > 0$. 取自然數 k, 使

$$\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

取 x 的鄰域 U_x, 使它與每個 $\mathfrak{U}_n$ $(1 \leqslant n \leqslant k)$ 中至多有窮多個集相交. 考察

$$\Sigma \equiv \{(n, \alpha) | 1 \leqslant n \leqslant k,\ \alpha \in J_n,\ U_x \cap U_{n,\alpha} \neq \phi\},$$

這種 (n, α) 至多有有窮多個. 設 s 是 Σ 的基數(勢)，於是 $s \in N$. 取 x

的鄰域 $O_x \subset U_x$，使對於每個 $\xi_{n,\alpha}((n,\alpha)\in\Sigma)$ 及每個 $y\in O_x$，

$$|\xi_{n,\alpha}(x)-\xi_{n,\alpha}(y)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2R}},$$

這由 ξ_ω 的連續性是可能的．如果 $n\leqslant k$，但 $(n,\alpha)\notin\Sigma$，那末依 Σ 的定義，

$$O_x\cap U_{n,\alpha}=\phi,$$

$$\xi_{n,\alpha}(x)=\xi_{n,\alpha}(y)=0.$$

於是

$$\sum_{\substack{\alpha\in J_n\\ 1\leqslant n\leqslant k}}(\xi_{n,\alpha}(x)-\xi_{n,\alpha}(y))^2<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

由 k 的定義可知

$$\sum_{\substack{\alpha\in J_n\\ n>k}}(\xi_{n,\alpha}(x)-\xi_{n,\alpha}(y))^2=\sum_{n>k}\frac{1}{2^n}\sum_{\alpha\in J_n}(q_{n,\alpha}(x)-$$

$$-q_{n,\alpha}(y))^2\leqslant\frac{4}{2^k}<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

於是在 $\mathfrak{N}^\tau$ 中，

$$\rho(\varphi(x),\varphi(y))=\sqrt{\sum_\omega(\xi_\omega(x)-\xi_\omega(y))^2}=\sqrt{\sum_{n\leqslant N}+\sum_{n>N}}<\varepsilon.$$

因而 φ 的連續性得證．

φ 是開映像，即 $\overset{-1}{\varphi}$ 是連續的．設 $x\in E$，$O_x\in\mathfrak{B}(x)$．取 $U_{n,\alpha}\in\mathfrak{B}$，使 $x\in U_{n,\alpha}\subset O_x$．令 $\varepsilon\equiv\xi_{n,\alpha}(x)$，於是 $\varepsilon>0$．如果對某一元 $y\in E$，$\rho(\varphi(x),\varphi(y))<\varepsilon$，那末 $\xi_{n,\alpha}(y)>0$，從而 $y\in U_{n,\alpha}$．這正是說 $\varphi(U_{n,\alpha})\supset S(\varphi(x);\varepsilon)$，$U_{n,\alpha}\supset\overset{-1}{\varphi}(S(\varphi(x);\varepsilon))$，證明了 $\overset{-1}{\varphi}$ 的連續性．

全部證明完結．

參考文獻

Nagata, Jun-iti: J. Inst. Polytech., Osaka City Univ., A. 1 (1950), 93—100. 他發現了與 Смирнов 同樣的距離化定理．

Iseki, Kiyoski., A note on the general metigation problem, Pror. Jap. Acad. 30 (1954), 855—856 給出上述結果的簡證．

Смирнов, Ю., Необходимое и достаточное условие метризуемости топологического пространства, ДАН, **77**, 2 (1951), 197—200.

——, Ук. Мат. Ж., 3 (1951), 161—163.

Nagata, Jun-iti: A theory for metizability of a topological space, Pror. Jap. Acad., 33 (1957), 128—130.

第六章　描述集論大意

描述集論已經是數學中一個獨立的學科，本書中不打算深入這一領域，而只限於敍述這方面的一些在汎函分析中常用到的基礎知識.

§1. 綱

定義 1. 拓樸空間 E 中點集 A 叫做第一綱的，是指 A 可以表示成可數多個疏集的併. 非第一綱的集叫做第二綱集.

註. 這定義是法國數學家 R. Baire 的. 有些作者採取另外的定義，例如在 Н. Н. Лузин 的"實變數函數論" (Теория функций действительного переменного, 1948) 與 П. С. Александров "集與函數的汎論初階"中，定義數直綫 R 中的集 A 叫做第二綱，是指 $R\setminus A$ 是第一綱的. 依照這個定義，R 中閉區間 $[a, b]$ 就不是第二綱的，並且也不是第一綱的，而按照 Baire 的定義，在 R 中 $[a, b]$ 是第二綱集.

例 1. 在數直綫 R 中，有理點全體組成第一綱集，因爲在這個空間中，凡由一個點組成的集必是疏集. 一般，在一無孤立點的 (T_1) 型空間中，凡可數點集必是第一綱的.

例 2. 設 x 是拓樸空間 E 中的孤立點，那末由一個點組成的集 $\{x\}$ 是第二綱的. 事實上，如果 $\{x\}$ 可以表成可數多個疏集的併，那末 $\{x\}$ 本身必是疏集，從而 $\overline{\{x\}}$ 不能含開集. 但由此得出矛盾，因爲 $\overline{\{x\}}\supset\{x\}$，而後者是開集!

更有趣的例將在下面看到.

定理 1. 拓樸空間 E 中一切第一綱集的全體 $\mathscr{S}$ 是 Boole 代數 $\mathfrak{P}(E)$ 中的 σ-幻.

證. 注意疏集的子集仍是疏集、從而第一綱集的子集仍是第一綱集. 按定義，可數多個第一綱集的併集仍是第一綱的. 證完.

定理 2. 完備距離空間必是第二綱的.

證．姑設完備距離空間E是第一綱的，

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \tag{1}$$

這裏每個A_n是疏集．依疏集的性質，存在一半徑$\rho_1 < 1$的球K_1，使$K_1 \cap A_1 = \phi$．又存在半徑爲$\rho_2 < \frac{1}{2}$的球K_2，$K_2 \subset K_1'$，K_1'表示K_1的同心球，它的半徑是$\frac{\rho_1}{2}$，使$K_2 \cap A_2 = \phi$．依此類推，一般，存在半徑$\rho_n < \frac{1}{n}$的球K_n，使$K_n \subset K_{n-1}'$，K_{n-1}'是K_{n-1}的同心球，但它的半徑$= \rho_{n-1}/2$，並且$K_n \cap A_n = \phi (n = 2, \cdots)$．設$x_n$是$K_n$的中心，那末$\{x_n\}$是基本列，因爲當$m > n$時，$x_m$與$x_n$的距離

$$\rho(x_m, x_n) < \frac{\rho_n}{2} < \frac{1}{2n}.$$

依空間的完備性，存在$x_0 \in E$，使

$$\rho(x_n, x_0) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

在不等式$\rho(x_n, x_m) < \rho_n/2 \ (m > n)$中，令$m \to \infty$，得$\rho(x_n, x_0) \leqslant \leqslant \rho_n/2 < \rho_n$，從而$x_0 \in K_n$，這就是說，$x_0 \notin A_n$，而這對一切$n$成立，與(1)矛盾．因此$E$是第二綱的．

註．對於一般拓撲空間，一個比第二綱更基本的性質乃是下面定義中所陳述的．

定義 2． 拓撲空間叫做 Baire 空間，是指下列（兩個相互等價的）條件中的任一個成立：

1）可數多個稠開集的交仍是稠集；

2）可數多個無內點的閉集的併仍是無內點的．

定理 3． 爲了拓撲空間E是 Baire 空間，必須且只須下列條件中的任一個成立：

3）E中不空開集必不是第一綱的；

4）E中第一綱集的補集必是稠的．

證．爲了集A是第一綱的，必須且只須

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

這裏 A_n 是疏集，從而 $\overline{A}_n$ 是緣集．從而如 E 是 Baire 空間，依定義 2 的條件 2)，$\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ 沒有內點，即它的子集 A 不可能是開集．即 2) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ 3)．4)意味着第一綱集不能包含不空開集，從而 4) $\Longleftrightarrow$ 3)．設 4) 成立，那末可數多個無內點的閉集的併 A 既是第一綱的，從而它的補集是稠的，即它不能包含不空開集．於是得 2)．證完．

註．特別由 3)看出 Baire 空間必是第二綱的．

系．Baire 空間中每個不空開集必是 Baire 空間．反之，如果拓撲空間 E 中每點具有一個鄰域 V，使 V 是 Baire 空間，那末 E 本身是 Baire 空間．

證．1) 設 A 是 Baire 空間 E 中的不空開集，那末 A 的不空開子集也是 E 的不空開子集，從而由條件 3) 可知 A 是 Baire 空間．

2) 設 A 是拓撲空間 E 中的不空開集，而 x 是 A 中任意點，V 是系中第二部分條件中所說的 x 的鄰域，那末如 A 是第一綱的，$V \cap A$ 必是 V 中第一綱集，且又是 V 中不空開集．這按條件 3) 不可能．證完．

定理 4．在 Baire 空間 E 中，第一綱集的補集必是 Baire 空間．

證．設 A 是 E 中第一綱集．依條件 4)，A 的補集 $B = CA$ 是稠的．如果 Z 是子空間 B 中的第一綱集，那更是空間 E 中的第一綱集，從而 $A \cup Z$ 是 E 中第一綱集．因此 $B \setminus Z = E \setminus (A \cup Z)$ 是 E 中稠集，從而更是 B 中稠集．依條件 4)，B 是 Baire 空間．

定理 5．局部緊(T_2)型空間 E 必是 Baire 空間．

證．證明與定理 2 很相似．設 $\{A_n\}$ 是 E 中一串稠開集，而 G 表任一不空開集．今定義一串不空開集 G_n 如下：令 $G_1 = G$，而如 G_n 已定，$G_n \cap A_n$ 是不空開集，而因局部緊(T_2)型空間必是正則的（第三章 § 3 定理 2 的系)，存在不空開集 G_{n+1}，使 $\overline{G}_{n+1} \subset G_n \cap A_n$．於是遞歸地定義出 $\{G_n\}$ 來，而有

$$G \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n.$$

由於 E 是局部緊的,可取 G_2, 使 $\overline{G}_2$ 是緊的; 於是 $\{\overline{G}_n\}_{n\geq 2}$ 是一串緊集,並且 $\overline{G}_n\supset\overline{G}_{n+1}$; 依第三章 § 1 定理12, $\bigcap_{n=2}^{\infty}\overline{G}_n\neq\phi$. G 既是任意開集,這說明 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 是 E 中稠集. 證完.

註. 關於 Baire 空間的進一步的研究,請參看 Léon Motchane, Sur la notion d'espace bitopologique et sur les espaces de Baire, C. R. Paris, 244(1957), 3121—3124; 又 Sur la caractérisation des espaces de Baire, C. R. Paris, 246 (1958), 215—218, Gustave Choquet, Une classe régulière d'espace de Baire, 同上, 218—220.

定義 3. 拓撲空間中點集 X 叫做在點 x 處疏的, 是指存在 $U\in\mathfrak{V}(x)$, 使 $X\cap U$ 是疏的.

定理 6. 為了集 X 在點 x 處不是疏的,必須且只須

$$x\in\overline{\mathring{\overline{X}}}.$$

證. 設 $x\in\overline{\mathring{\overline{X}}}$,那末對於任意開集 $U\in\mathfrak{V}(x)$, $G\equiv U\cap\mathring{\overline{X}}\neq\phi$. G 是開集,並且 $G\subset U\cap\overline{X}$. 但 $\overline{U\cap X}=\overline{U\cap\overline{X}}$. 事實上,如果 $Z\in\overline{U\cap\overline{X}}$, 對於每個開集 $V\in\mathfrak{V}(x)$, 必然 $V\cap U\cap\overline{X}\neq\phi$. 但 $V\cap U$ 是開集, 所以 $V\cap U\cap X\neq\phi$. 於是 $Z\in\overline{U\cap X}$. 由此得, $\overline{U\cap X}$ 包含開集 G, 從而 $U\cap X$ 不是疏集. 反之,如果 $x\notin\overline{\mathring{\overline{X}}}$,那末 $G_1\equiv E\setminus\overline{\mathring{\overline{X}}}$ 是 x 的開鄰域,而因

$$\overline{G_1\mathring{\cap}X}\subset\overline{G}\,\mathring{\cap}\,\overline{X}=\mathring{\overline{G}}_1\cap\mathring{\overline{X}},$$ [1]

如果 $\mathring{\overline{G}}_1\cap\mathring{\overline{X}}\ni y$, y 必有一開鄰域 $W\subset\overline{G}_1$, $W\subset\overline{X}$, 從而 $W\cap G_1\neq\phi$, 並且 $W\cap G_1\subset\overline{X}$. 所以

$$W\cap G_1\subset\mathring{\overline{X}}\subset\overline{\mathring{\overline{X}}}.$$

1) $A\mathring{\cap}B$ 表示集 $(A\cap B)$ 的內部.

與 $G_1 = E \setminus \overline{\mathring{\overline{X}}}$ 矛盾. 於是 $\mathring{\overline{G}} \cap \mathring{\overline{X}} = \phi$, 即

$$\mathring{\overline{G \cap X}} = \phi.$$

由此, $G \cap X$ 是疏集.

下面關於疏集的一個性質是有用的.

定理 7. 設 $N^{(\alpha)} (\alpha \in J)$ 是拓撲空間 E 中一族疏集, 而每個 $N^{(\alpha)}$ 是 $N = \bigcup_{\alpha} N^{(\alpha)}$ 中的開集, 那末 N 也是 E 中的疏集.

證. 注意

$$\bigcup_{\alpha} \mathring{\overline{N}}^{(\alpha)} \subset \mathring{\overline{\bigcup N^{(\alpha)}}} = \mathring{\overline{N}}.$$

今證

$$\overline{\bigcup \mathring{\overline{N}}^{(\alpha)}} = \overline{\bigcup \mathring{\overline{N}}^{(\alpha)}}.$$

事實上, 令 $x \in \mathring{\overline{N}}$, 必存在 $U \in \mathfrak{V}(x)$, 使 $U \subset \overline{N}$. 對於 x 的任意開鄰域 V, $V \cap U \subset \overline{N}$, 剛才無妨取 U 是開的, 可知 $V \cap U \cap N \neq \phi$. 設 $y \in V \cap U \cap N$, 那末 x 的任意開鄰域 V 與 N 相交, 並且與 $U \subset \mathring{\overline{N}}$ 相交, 而 $y \in U \subset \mathring{\overline{N}}$, $y \in N$, 從而

$$x \in \overline{\mathring{\overline{N}} \cap N}.$$

但依假定, $N^{(\alpha)}$ 是在 N 中開的, 所以 $N \setminus N^{(\alpha)}$ 在 N 中是閉的, 於是

$$N^{(\alpha)} = N \setminus \overline{(N \setminus N^{(\alpha)})} \subset E \setminus \overline{(N \setminus N^{(\alpha)})}.$$

所以

$$N = \bigcup_{\alpha} N^{(\alpha)} \subset \bigcup_{\alpha} (E \setminus \overline{(N \setminus N^{(\alpha)})}).$$

由此

$$\mathring{\overline{N}} \subset \mathring{\overline{N}} \cap \overline{N} \subset \overline{\mathring{\overline{N}} \cap N} \text{(因} \mathring{\overline{N}} \text{是開集)} \subset \overline{\mathring{\overline{N}} \cap \bigcup_{\alpha} (E \setminus \overline{(N \setminus N^{(\alpha)})})} =$$

$$= \overline{\bigcup_{\alpha} \mathring{\overline{N}} \setminus \overline{(N \setminus N^{(\alpha)})}}.$$

但

$$\mathring{N}\setminus\overline{(N\setminus N^{(\alpha)})}\subset\overline{N}\setminus\overline{(N\setminus N^{(\alpha)})}\subset$$

$$\subset\overline{N\setminus(N\setminus N^{(\alpha)})}=\overline{N^{(\alpha)}}.$$

而$\mathring{N}\setminus\overline{(N\setminus N^{(\alpha)})}$是開集，所以

$$\mathring{N}\setminus\overline{(N\setminus N^{(\alpha)})}\subset\mathring{\overline{N^{(\alpha)}}}.$$

由此

$$\mathring{N}\subset\overline{\bigcup\mathring{\overline{N^{(\alpha)}}}};\text{ 所以 }\mathring{\overline{N}}\subset\overline{\bigcup\mathring{\overline{N^{(\alpha)}}}}.$$

如果 $N^{(\alpha)}$ 是疏集，$\mathring{\overline{N^{(\alpha)}}}=\phi$，從而 $\mathring{\overline{N}}=\phi$，即$N$是疏集．證完．

定義 4. 拓撲空間E中點集A叫做在 x_0 點(x_0 不必 $\in A$)處是第一綱的，是指 x_0 有一鄰域 V，使 $V\cap A$ 是第一綱的．在相反的情形下，即如果對於 x_0 的每個鄰域 V，$V\cap A$ 是第二綱的，那末A叫做在 x_0 點處是第二綱的．

註．1) 今後將常用下列符號：

$$D(A)=\{x|x\in E,\ A\text{ 在 }x\text{ 處是第二綱的}\}.$$

2) 在定義4中，如只令 V 表示 x_0 的一個固定基本鄰域組(特別是 x_0 的一切開鄰域)，對定義的內容不發生影響．事實上，如果存在 x_0 的鄰域 V，使 $V\cap A$ 是第一綱的，取U屬於所給的基本鄰域組，並使 $U\subset\subset V$，那末 $U\cap A$ 也是第一綱的．

3) 設 x_0 是E中孤立點，那末任何含 x_0 的集 A 在 x_0 處是第二綱集．事實上，$\{x_0\}$本身是 x_0 的鄰域，而依定義 **1** 下例2，$\{x_0\}\cap A=\{x_0\}$是第二綱集．

定理 8. 在空間E中，$X\subset Y\Longrightarrow D(X)\subset D(Y)$.

證． 事實上，如果Y在 x_0 處是第一綱的，必存在 $V\in\mathfrak{B}(x_0)$，使 $Y\cap V$ 是第一綱的，從而 $X\cap V(\subset Y\cap V)$是第一綱的．

定理 9. 對於任意開集G及任意集X，

$$D(X)\cap G=G\cap D(G\cap X).$$

證．依定理8，只須證 $D(X)\cap G\subset G\cap D(G\cap X)$．設 $x\in G\cap D(X)$，對於x的每個鄰域 V，$V\cap G$ 仍是x的鄰域，所以 $V\cap G\cap X$ 是第二綱

集. $V \in \mathfrak{V}(x)$既是任意的，必然 $x \in D(G \cap X)$，即

$$x \in G \cap D(G \cap X).$$

證完.

定理 10. 設在拓撲空間E中有一集族$\{X_\iota\}(\iota \in J)$，使每個X_ι在$S = \bigcup_{\iota \in J} X_\iota$中是開集. 如果每個$X_\iota$是第一綱的，$S$也必是第一綱的.

證. 無妨設至少有一個X_ι是不空集. 設$\{G_\kappa\}$，$(\kappa \in K)$是滿足下列二條件的不空開集組成的極大族：

1° 每個$S \cap G_\kappa$是第一綱的；

2° 每兩個G_κ不相交.

首先，這種開集一定存在，因為依假定，必存在$\iota \in J$，使$X_\iota \neq \phi$，並且存在開集O_ι，使$X_\iota = O_\iota \cap S$，而X_ι是第一綱集. 容易看出，滿足條件1°，2°的不空開集族按包含關係是一序集，這序集中任意全序子集的上端（= 這個子集中一切族的併）仍滿足1°，2°，從而依 Zorn 輔助定理，滿足1°，2°的不空開集的極大族存在. 於是不再存在不空開集G，使G與一切G_κ不相交，並且$G \cap S$是第一綱的. 為了完成定理的證明，只須證：

a) $\bigcup_{\kappa \in K} (S \cap G_\kappa)$是第一綱集；

b) $S \setminus \bigcup_{\kappa \in K} G_\kappa$是疏集.

關於 a). 依假定，$S \cap G_\kappa$是第一綱集，從而可以寫成

$$S \cap G_\kappa = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i^{(\kappa)},$$

$N_i^{(\kappa)}$是疏集. 令

$$N_n = \bigcup_{\kappa \in K} N_n^{(\kappa)} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

那末

$$\bigcup_{\kappa \in K} (S \cap G_\kappa) = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n.$$

今證每個 N_n 是疏集。諸 G_κ 既然兩兩不相交，可知

$$\kappa \neq \kappa' \Longrightarrow N_n^{(\kappa)} \cap G_{\kappa'} = \phi,$$

從而

$$N_n^{(\kappa')} = N_n^{(\kappa')} \cap G_{\kappa'} = \bigcup_{\kappa \in H} (N_n^{(\kappa)} \cap G_{\kappa'}) = N_n \cap G_{\kappa'},$$

這就是說，$N_n^{(\kappa')}$ 是 N_n 中的開集。依定理 7，N_n 是疏集。

關於 b)。為了證明 $S \setminus \bigcup_\kappa G_\kappa$ 是疏集，只須證 $E \setminus \bigcup_\kappa G_\kappa$ 是疏集，而因後者是閉集，只須證它是緣性集。如果不然，必存在開集 H，使

$$H \subset E \setminus \bigcup_\kappa G_\kappa, \ H \neq \phi.$$

依 G_κ 的定義，$H \cap S$ 並非第一綱的，因否則 (G_κ) 就失去極大性了。設 $X_\iota \cap H \neq \phi$，這樣的 $\iota \in J$ 必存在，否則 $H \cap S = \phi$ 是第一綱了。考察開集

$$G = H \setminus \overline{S \setminus X_\iota},$$

$S \cap G$ 是第一綱的，因為 X_ι 在 S 中既是開的，$X_\iota = S \setminus \overline{S \setminus X_\iota}$，從而

$$S \cap G = S \cap (H \setminus \overline{S \setminus X_\iota}) = H \cap (S \setminus \overline{S \setminus X_\iota}) =$$
$$= H \cap X_\iota \subset X_\iota.$$

但 $G \neq \phi$，因為

$$\phi \neq H \cap X_\iota = S \cap G \subset G.$$

又 $G \cap G_\kappa = \phi$ 對每個 $\kappa \in K$ 成立，因為

$$G \subset H \subset E \setminus \bigcup_\kappa G_\kappa.$$

這與 (G_κ) 的極大性衝突。於是 $E \setminus U G_\kappa$ 是緣性集。

定理證完。

系．如果 X 在它自己的每點處是第一綱的，那末 X 是第一綱集。

證．依假定，對於每個 $x \in X$，存在開集 $G_x \ni x$，使 $G_x \cap X$ 是第一綱的。於是

$$X = \bigcup_{x \in X} (X \cap G_x),$$

這裏每個 $X \cap G_\alpha$ 在 X 中是開的．依定理10，X 是第一綱的．

定理 11． $D(X)$ 是閉集．

證．設 $x \in E \setminus D(X)$，必存在開集 $U \ni x$，使 $X \cap U$ 是第一綱集．對於每個 $z \in U$，$U \in \mathfrak{B}(z)$，並且 $X \cap U$ 是第一綱集，從而 $z \in E \setminus D(X)$，這就是說，$U \subset E \setminus D(X)$，即 $E \setminus D(X)$ 的每個點是它的內點，即 $E \setminus D(X)$ 是開集．

定理 12． 爲了 X 是第一綱集，必須且只須下面任一條件成立：

1) $D(X) = \phi$;

2) $X \cap D(X) = \phi$.

證．如果 $D(X) = \phi$，那末 $X \cap D(X) = \phi$．如果 $X \cap D(X) = \phi$，那末 X 在它自己的每點處是第一綱的；依定理 10 的系，X 是第一綱的．再設 X 是第一綱的，它的子集都是第一綱的，從而對於每個開集 U，$U \cap X$ 是第一綱集，這就是說，X 在每個點 $(\in E)$ 處是第一綱集，從而 $D(X) = \phi$．

系． $D(X \setminus D(X)) = \phi$，就是說，$X$ 在那裏是第一綱的那些點組成第一綱集．

證．首先注意 $D(X \setminus D(X)) \subset D(X)$，所以 $[X \setminus D(X)] \cap D(X \setminus D(X)) \subset [X \setminus D(X)] \cap D(X) = \phi$；依定理 12，$D(X \setminus D(X)) = \phi$．

定理 13． 1) $D(X \cup Y) = D(X) \cup D(Y)$，

$D(X) \setminus D(Y) \subset D(X \setminus Y)$;

2) $D(D(X)) = D(X)$;

3) $D(X) = \overline{\overset{\circ}{D(X)}}$.

證．1) 依定理 8，$D(X) \cup D(Y) \subset D(X \cup Y)$．設 $x \in D(X)$，$x \notin D(Y)$，那末必存在 x 的鄰域 U，V，使 $U \cap X$ 與 $V \cap Y$ 是第一綱集，所以

$$(U \cap V) \cap (X \cup Y)$$

是第一綱的，即 $x \notin D(X \cup Y)$．於是得證

$$D(X\cup Y)=D(X)\cup D(Y).$$

以 $X\setminus Y$ 代 X，得 $D(X)=D(X\setminus Y)\cup D(Y)$，即

$$D(X)\setminus D(Y)\subset D(X\setminus Y).$$

2) 依定理 12 的系，$D(X\setminus D(X))=\phi$. 依剛才證明的 1)，$D(X)\setminus D(D(X))=\phi$，即 $D(X)\subset D(D(X))$. 但 $(E\setminus\overline{X})\cap X=\phi$ 是第一綱集，而 $E\setminus Y$ 是開集，所以 $E\setminus\overline{X}\subset E\setminus D(X)$，即 $D(X)\subset\subset\overline{X}$. 用 $D(X)$ 代替 X，並注意 $D(X)$ 是閉集（定理 11），得

$$D(D(X))\subset D(X).$$

於是 2) 得證.

3) 首先證 $D(X)\subset\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}\subset\overline{\overline{X}}=\overline{X}$. 事實上，依定理 6，爲了 $x\in\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}$，必須且只須 X 在 x 處是不疏的。如果 $x\in D(X)$，那末 X 在 x 處不是第一綱的，更不是在 x 處疏的，從而 $x\in\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}$. 於是上面要證的一串包含關係得證. 用 $D(X)$ 代替 X，得（依 2)）

$$D(X)=D(D(X))\subset\overline{\overset{\circ}{\overline{D(X)}}}=\overline{\overset{\circ}{D(X)}}\subset\overline{D(X)}=D(X).$$

於是 3) 得證.

系 1. 如果 X 是第二綱集，必存在開集 G，使 X 在 G 的每點處是第二綱集.

證. 設 X 是第二綱集. 依定理 12，$D(X)\neq\phi$，所以依定理 13，3)，$G=\overset{\circ}{D(X)}\neq\phi$，$G\subset D(X)$，即 X 在開集 G 的點處都是第二綱的.

系 2. $X=[X\setminus D(X)]\cup[X\cap D(X)]$ 是集 X 的一個分解，其中第一項是 X 中開的第一綱集，而第二項是在它自己的每點處第二綱的.

證. 既然 $D(X\setminus D(X))=\phi$（定理 12 的系），所以依定理 13 的 1)，

$$D(X\cap D(X))\supset D(X)\setminus D(X\setminus D(X))=D(X),$$

從而 $D(X)=D(X\cap D(X))$. 於是

$$X\cap D(X)\subset D(X)=D(X\cap D(X)),$$

即 $X\cap D(X)$ 是在它自己的每點處是第二綱的.

系 3. $X=(X\setminus \overset{\circ}{\widehat{D(X)}})\cup(X\cap \overset{\circ}{\widehat{D(X)}})$是$X$的分解，其中右邊相併的兩個集是互不相交的，第一項是閉的第一綱集，第二項在它自己的每點處是第二綱集.

證. 由於對任意集 H, $\mathring{H}=C\overline{CH}$, 可知

$$X\setminus \overset{\circ}{\widehat{D(X)}} = X\cap\overline{X\setminus D(X)}=$$

$$=\{X\cap D(X)\cap\overline{X\setminus D(X)}\}\cup\{[X\setminus D(X)]\cap$$

$$\cap\,\overline{X\setminus D(X)}\},$$

其中第一項$\subset D(X)\cap\overline{E\setminus D(X)}=\mathrm{fr}(D(X))$是閉集的緣集，從而是疏集，而第二項是$X\setminus D(X)$的子集，從而是第一綱的. 於是$X\setminus \overset{\circ}{\widehat{D(X)}}$是第一綱集. 既然依定理 13, 1),

$D(X)\setminus D(X\cap\overline{X\setminus D(X)})\subset D(X\setminus\overline{X\setminus D(X)})\subset D(X)$, 而 $D(X\cap\overline{X\setminus D(X)})=\phi$, 因為上面已經證明$X\cap\overline{X\setminus D(X)}$是第一綱集. 於是$D(X\setminus\overline{X\setminus D(X)})=D(X)$,所以

$$X\setminus\overline{X\setminus D(X)}\subset X\setminus(X\setminus D(X))=X\cap D(X)\subset D(X)=$$

$$=D(X\setminus\overline{X\setminus D(X)}),$$

這就是說，$X\cap\overset{\circ}{\widehat{D(X)}}=X\setminus\overline{X\setminus D(X)}$在它自己的每點處是第二綱的.

§ 2. 集的 Baire 性質

定義 1. 拓撲空間E中點集X叫做具有廣義 Baire 性質的，是指存在開集G，使

$$X\equiv G(\mathscr{P}),$$

這裏$\mathscr{P}$表示$\mathfrak{P}(E)$中由一切第一綱集組成的σ-幻，$X\equiv G(\mathscr{P})$表示X與G的對稱和

$$(X\setminus G)\cup(G\setminus X),$$

它是$\mathscr{P}$中的集.

註. 在上面定義中，如果用閉集F代替開集G，定義內容並不改變. 我們只須證明，對於每個開集G，$G\equiv\overline{G}(\mathscr{P})$，對每個閉集$F$，

$F \equiv \mathring{F}(\mathscr{P})$. $\overline{G}\setminus G$ 既是閉集，只須證它沒有內點，於是它就是疏集了．事實上，如果

$$x \in \overbrace{\overline{G}\setminus G}^{\circ},$$

那末 x 有一開鄰域 U，使 $U\subset\overline{G}\setminus G$，即 U 含 $\overline{G}$ 的一個點，從而 $G\cap U\neq\neq\phi$，與 $U\subset\overline{G}\setminus G$ 矛盾．同理證明 $F\setminus\mathring{F}$ 無內點．

定理 1． 一拓樸空間 E 中具有廣義 Baire 性質的集的全體 $\mathfrak{B}_1$ 是 $\mathfrak{P}(E)$ 中一個子 σ-代數．

證．1) 如果 $X\in\mathfrak{B}_1$，存在開集 G，使

$$G\equiv X(\mathscr{P}), \text{所以 } CG\equiv CX(\mathscr{P}),$$

即 $CX\equiv$ 閉集 $CG(\mathscr{P})$，依上面註，$CX\in\mathfrak{B}_1$．

2) 設 $X_n\in\mathfrak{B}_1$，必存在開集 G_n，$G_n\equiv X_n(\mathscr{P})$，從而，因 $\mathscr{P}$ 是 σ-幻，而 $\cup G_n$ 仍是開集，可知

$$\bigcup_n X_n\in\mathfrak{B}_1.$$

3) 設 $X_n\in\mathfrak{B}_1$，必存在閉集 $F_n\equiv X_n(\mathscr{P})(n=1,2,\cdots)$，所以 $\bigcap_n F_n\equiv\cap X_n(\mathscr{P})$，而 $\cap F_n$ 是閉集．由此得知 $\bigcap_n X_n\in\mathfrak{B}_1$．

系． $\mathfrak{B}_1$ 包含一切 Borel 集．

證．一切 Borel 集組成 $\mathfrak{P}(E)$ 中一切子 σ-代數 $\mathfrak{B}_0$，而 $\mathfrak{B}_0$ 是包含一切閉集的最小子 σ-代數．既然閉集含在 $\mathfrak{B}_1$ 中，必然 $\mathfrak{B}_1\supset\mathfrak{B}_0$．

定理 2． 爲了點集 X 具有廣義 Baire 性質，必須且只須下列的條件之一成立：

1) 存在 Q, $R\in\mathscr{P}$ 及開集 G，使

$$X=(G\setminus Q)\cup R;$$

2) 存在 Q, $R\in\mathscr{P}$ 及閉集 F，使

$$X=(F\setminus Q)\cup R;$$

3) 存在 $R\in\mathscr{P}$，使 $X\setminus R$ 在空間 $E\setminus R$ 中是既開且閉的；

4) $D(X)\cap D(E\setminus X)$ 是疏集（換句話說，對於每個不空開集 G，必有一點 $x_0\in G$，使 X 或 $E\setminus X$ 在 x_0 處是第一綱的）；

5) $[D(X)\setminus X]\in\mathscr{P}$.

證. 我們證明定義$\Longrightarrow$1)$\Longleftrightarrow$2)$\Longrightarrow$3)$\Longrightarrow$4)$\Longrightarrow$5)$\Longrightarrow$定義.

定義$\Longrightarrow$1). 如果$X\in\mathfrak{B}_1$, 必存在開集G及集$H\in\mathscr{P}$, 使$X=H\ominus G$ ($\ominus$表示"對稱差"),這就是說,

$$X=(H\setminus G)\cup(G\setminus H),$$

這裏$H\setminus G\in\mathscr{P}$, 因爲$H\setminus G\subset H\in\mathscr{P}$.

1)$\Longleftrightarrow$2)如果$Q,R\in\mathscr{P}$, 而G是開集,那末

$$(G\setminus Q)\cup R=[(\overline{G}\setminus(\overline{G}\setminus G))\setminus Q]\cup R=$$
$$=\{\overline{G}\setminus[(\overline{G}\setminus G)\cup Q]\}\cup R.$$

依定義1下註, $\overline{G}\setminus G\in\mathscr{P}$, 所以$(\overline{G}\setminus G)\cup Q\in\mathscr{P}$,即1)$\Longrightarrow$2). 反之,如$F$是閉集,

$$(F\setminus Q)\cup R=\{(\mathring{F}\setminus Q)\cup[(F\setminus\mathring{F})\setminus Q]\}\cup R=$$
$$=(\mathring{F}\setminus Q)\cup\{[(F\setminus\mathring{F})\setminus Q]\cup R\},$$

而最後曲括弧中的項屬於$\mathscr{P}$(見定義1下註),所以2)$\Longrightarrow$1).

2)$\Longrightarrow$3). 我們利用2)$\Longleftrightarrow$1), 於是存在開集G, 閉集F及集$R_i,Q_i\in\mathscr{P}(i=1,2)$, 使

$$X=(G\setminus Q_1)\cup R_1=(F\setminus Q_2)\cup R_2,$$

於是

$$X\setminus(Q_1\cup R_1)=G\setminus(Q_1\cup R_1),$$
$$X\setminus(Q_2\cup R_2)=F\setminus(Q_2\cup R_2),$$

從而

$$X\setminus(Q_1\cup R_1\cup Q_2\setminus R_2)=G\setminus(Q_1\cup R_1\cup Q_2\cup R_2)=$$
$$=F\setminus(Q_1\cup R_1\cup Q_2\cup R_2),$$

這就是說, $X\setminus(Q_1\cup R_1\cup Q_2\cup R_2)$是在$E\setminus(Q_1\cup R_1\cup Q_2\cup R_2)$中既開且閉的,並且

$$Q_1\cup R_1\cup Q_2\cup R_2\in\mathscr{P}.$$

3)$\Longrightarrow$4). 依3)存在$R\in\mathscr{P}$及開集G, 使

$$X\setminus R=G\setminus R.$$

於是$X=(G\setminus R)\cup(X\cap R)$. 依定理13的1),

$$D(X) = D(G \setminus R) \cup D(X \cap R).$$

但 $X \cap R \in \mathscr{P}$，依定理 12，$D(X \cap R) = \phi$. 又依定理 13，$D(G) = D(G) \setminus \phi = D(G) \setminus D(R) \subset D(G \setminus R) \subset D(G)$（定理 8），所以 $D(G) = D(G \setminus R)$，即 $D(X) = D(G)$. 又既然 $X \cap CR = G \cap CR$，可知 $CX \cup R = CG \cup R$，依定理 13 的 1)，

$$D(CX) = D(CX) \cup D(R) = D(CG) \cup D(R) = D(CG).$$

由此

$$D(X) \cap D(E \setminus X) \subset D(G) \cap D(CG).$$

但依定理 13 的 3) 的證明，$D(G) \subset \overline{G}$，$D(E \setminus G) \subset \overline{E \setminus G}$，所以 $D(X) \cap D(E \setminus X) \subset \overline{G} \cap \overline{E \setminus G} = \mathrm{fr}(G)$ 是疏集. 於是 $D(X) \cap \cap D(E \setminus X)$ 是疏集.

4) $\Longrightarrow$ 5). 設 $D(X) \cap D(E \setminus X)$ 是疏集. 由於

$$\begin{aligned} D(X) \setminus X &= \{[D(X) \setminus X] \cap D(E \setminus X)\} \cup \\ &\cup \{D(X) \setminus X \setminus D(E \setminus X)\} \subset \\ &\subset \{D(X) \cap D(E \setminus X)\} \cup \{(E \setminus X) \setminus D(E \setminus X)\}. \end{aligned}$$

上式右邊第一項是疏集，第二項依定理 12 及其系是第一綱集，從而 $D(X) \setminus X \in \mathscr{P}$.

5) $\Longrightarrow$ 定義. 設 $D(X) \setminus X \in \mathscr{P}$. 依定理 12 及其系，$X \setminus D(X) \in \in \mathscr{P}$，於是 $X \ominus D(X) \in \mathscr{P}$，即 $X \equiv D(X)(\mathscr{P})$，而 $D(X)$ 是閉集.

證完.

定理 3. 設空間 E 中有子集 Z, Y, W, $W \supset Y \supset Z$；設 Z 在 Y 中具廣義 Baire 性質，而 Y 在 W 中具廣義 Baire 性質，那末 Z 在 W 中具廣義 Baire 性質. 事實上，依定理 2 的 3)，Y 中有一按 Y 爲第一綱的集 Q. W 有一在 W 中爲第一綱的集 R，使 $Z \setminus Q$ 在 $Y \setminus Q$ 中是既開且閉的，而 $Y \setminus R$ 在 $W \setminus R$ 中是既開且閉的. 於是 $Z \setminus Q \setminus R$ 在 $W \setminus Q \setminus R$ 中是既開且閉的. 但 Q 按 Y 是第一綱的，從而按 $W(\supset Y)$ 更是第一綱的. 事實上，Y 中疏集 B 在 $W(\supset Y)$ 中更是疏的，因爲 Y 中每個開集 G 含 Y 中一個開集 G_1，使 $G_1 \cap B = \phi$. 考察 W 中開集 H，$H \cap Y$ 是 Y 中開集，所以 $H \cap Y$ 含 Y 中開集 G_1，使 $G_1 \cap B = \phi$. 但

$G_1 = H_1 \cap Y$, H_1 是 W 中開集，所以 $H_1 = (H_1 \cap Y) \cup (H_1 \setminus Y) = G_1 \cup \cup (H_1 \setminus Y)$，所以 $H_1 \cap H = G_1 \cup (H \cap H_1 \setminus Y)$, $H_1 \cap H \cap B = \phi$（因爲 $B \subset Y$）. 所以 $Q \cup R$ 在 W 中是第一綱的. 所以 Z 在 W 中具有廣義 Baire 性質. 證完.

定義 2. 空間 E 中集 X 叫做具有狹義 Baire 性質，是指對於 E 中每個集 A、$A \cap X$ 在子空間 A 中具有廣義 Baire 性質. 我們寫作 $X \in \mathfrak{B}_r$.

註. 顯然具有狹義 Baire 性質的集也必具廣義 Baire 性質.

定理 4. 爲了集 X 具有狹義 Baire 性質，必須且只須對於每個完集 A、$X \cap A$ 在子空間 A 中具有廣義 Baire 性質.

證. 條件的必要性直接由定義導出. 今證充分性. 設 H 是任意集. 令 $\overline{H} = A \cup C (C = \overline{H} \setminus A)$, A 是完集，C 是散播集[1]，於是 $X \cap \cap \overline{H} = (X \cap A) \cup (X \cap C)$. 依假定、$X \cap A$ 在 A 中具有廣義 Baire 性質. 但 A 是閉集，所以在空間 $\overline{H}$ 中具有廣義 Baire 性質. 因此 $X \cap A$ 在 $\overline{H}$ 中具有廣義 Baire 性質（定理 3）. $X \cap C$ 既是散播集，它是一個開集與一個疏集的併、從而它是 $\overline{H}$ 中具有廣義 Baire 性質的. 於是 $X \cap \overline{H} = (X \cap A) \cup (X \cap C)$ 是在 $\overline{H}$ 中具有廣義 Baire 性質的. 因此 $X \cap H$ 在 H 中是具有廣義 Baire 性質的. 事實上，一般，如果 Z 在 $\overline{Y}$ 中具有廣義 Baire 性質，那末 $Z \cap Y$ 在 Y 中也具有廣義 Baire 性質，因爲由 $Z = (G \setminus P) \cup R$（$G$ 是 $\overline{Y}$ 中開集，P 與 R 是 $\overline{Y}$ 中第一綱集）可知 $Z \cap Y = (G \cap Y \setminus P) \cup (R \cap Y)$, $G \cap Y$ 是 Y 中開集，$P \cap Y$ 與 $R \cap Y$ 是 Y 中第一綱集. 證完.

§3. 解析地可表現的映像與具有 Baire 性質的映像

本節討論由一個距離空間 E 到另一距離空間 E_0 中的映像；這些映

[1] 點集叫做自密的、是指它的每一個點是它自己的積集點. 不含任何自密子集的點集叫做散播集. 每個閉集可以表示成一個完集與一個散播集的併. 事實上，令 P 表示閉集 F 中一切自密子集的併，P 仍是自密的. 這樣，$\overline{P}$ 也是自密的，因爲 $x_0 \in \overline{P} \Longrightarrow x_0 \in P$ 或 $x_0 \in P'$，而在前一情形 x_0 是 P 的積集點，在後一情形 x_0 是 P 的導集中的元，從而仍是 $\overline{P}$ 的積集點. 但 $\overline{P}$ 是閉集，所以 $\overline{P}$ 是完集. 既然 $F \setminus \overline{P}$ 不再含任何自密集，所以 $F \setminus \overline{P}$ 是散播集.

像全體表示成 E_0^E. 設 $f_n \in E_0^E$, $f \in E_0^E$, 我們設列(f_n)在 E_0^E 中斂於 f, 是指對於每個 $x \in E$, 在 E_0 中

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

這時我們簡單地表示成

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n \text{ 或 } f_n \to f_0.$$

這樣, E_0^E 組成一個(L)空間(收斂性空間):

1° $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n \Longrightarrow f = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}$, (f_{n_k})表示(f_n)的任意子列;

2° $f_n \equiv f (n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \lim\limits_{n} f_n = f$;

3° $f_n \nrightarrow f \Longrightarrow (f_n)$有一子列$(f_{n_k})$, 使$(f_{n_k})$不包含任何收斂於 f 的子列.

只須驗明最後一性質. 如果 $f_n \nrightarrow f$, 必存在 $x_0 \in E$, 使 $f_n(x_0) \nrightarrow f(x_0)$. 依距離空間中收斂的定義, 存在一個 $\varepsilon > 0$, 使有一串自然數 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 滿足

$$\rho(f_{n_k}(x_0), f(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

這裏 ρ 表示 E_0 中的距離. 顯然(f_{n_k})不含任何在 x_0 處收斂於 $f(x_0)$的子列.

注意在(L)空間中, 一集 A 叫做閉的, 是指 $f_n \in A$, $f_n \to f \Longrightarrow f \in A$. 特别, 依 E_0^E 中這樣定義的收斂性, E_0^E 中的閉集叫做映像的閉族. 下面如不加特殊說明, E_0, E, E_0^E, $f_n \to f$ 的意義均如上.

定義 1. E_0^E 中包含一切由 E 到 E_0 的連續映像的最小閉族中的映像叫做可解析地表現的映像. 這一映像的閉族表示成 $\mathfrak{B}_0$.

例. 考察任意距離空間 E, 但令 $E_0 = R$. 令 A 表示 E 中一個閉集. A 的特徵函數 $\chi_A(x)$ 可以表示成

$$\chi_A(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + n\rho(x, A)},$$

這裏 $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y)$. 既然 $\rho(x, A)$是 x 的連續函數, χ_A 是解析地可表現的映像.

註. 可解析地表現的映像可以分類如下:

1° 第 0 類映像即一切連續映像；

2° 對於凡第一、二類序數 $\alpha < \Omega$，第 α 類映像即可表示成 $\xi(<\alpha)$ 類映像的極限，但又不屬於任何第 $\xi(<\alpha)$類的映像。特別，如果 $E = E_0 = R$，以上各類恰是 Baire 的函數類。

注意可解析地表現的映像的分類只限於 $\alpha < \Omega$ 的各類，因爲既然取極限只是利用可數多個映像，對於任意一串可解析地表現的映像 f_n，必存在 $\alpha < \Omega$，使 f_n 都屬於第 α 類或 α 以前的類，從而 $\lim f_n = f$ 必至高屬於 $\alpha + 1$ 類。反之，凡 $\alpha < \Omega$ 的各類是必要的。

定義 2. 設 $f \in E_0^E$，而對於 E_0 中每個閉集 A，$\overset{-1}{f}(A)$是 E 中的 Borel 集，那末 f 叫做依 Borel 可測的映像。

定理 1. 設 f 是解析地可表現的映像，那末 f 是 Borel 可測的。

證． 令 $\mathscr{B}^*$ 表示 E_0^E 中一切按 Borel 可測的映像全體． 設 $f_n \in \mathscr{B}^*$，而 $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$，今證 $f \in \mathscr{B}^*$，即 $\mathscr{B}^*$ 是閉族．事實上，我們將證明，如果 A 是 E_0 中閉集，那末 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$，$G_n$ 是開集．爲此，令

$$G_n = \left\{x \,|\, x \in E_0, \rho\ (x, A) < \frac{1}{n}\right\},$$

ρ 表示 E_0 中的距離，那末 G_n 是開集，並且

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = A.$$

這時

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = A.$$

事實上，$G_n \subset \overline{G}_n \subset G_{n-1}$，從而

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = A.$$

現在證明，如果 $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$，那末

$$\overset{-1}{f}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{-1}{f}_{n+k} \cdot (G_n).$$

首先證明，如果 $y = \lim y_n$，那末

$$y \in A \Longleftrightarrow \text{對於一切 } n, \exists k, \text{使 } y_{n+k} \in G_n.$$

為此，設 $y \in A$，那末對於每個 n，可取 m 足够大，使 $\rho(y_m, y) < \dfrac{1}{n}$，所以 $y_m \in G_n$，即當 k 足够大時，$y_{n+k} \in G_n$。反之，設 $y \notin A$，必存在 n，使 $y \notin \overline{G}_n$。因此，存在足够大的 m，使

$$j \geqslant m > n \Longrightarrow y_j \notin \overline{G}_n,$$

這就是說，$y_{m+k} \notin \overline{G}_n\ (k = 1, 2, \cdots)$。但 $\overline{G}_n \supset \overline{G}_m (m > n)$，所以 $y_{m+k} \notin \overline{G}_m$，即存在一個 m，使對於每個 k，$y_{n+k} \notin \overline{G}_m$。令 $y_n = f_n(x)$，$y = f(x)$，$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$。依上述，

$$f(x) \in A \Longleftrightarrow \text{對於每個 } n, \exists k \text{ 使 } f_{n+k}(x) \in G_n,$$

即

$$x \in \overset{-1}{f}(A) \Longleftrightarrow \text{對於每個 } n, \exists k, x \in \overset{-1}{f}_{n+k}(G_n),$$

換句話說，

$$\overset{-1}{f}(A) = \bigcap_n \bigcup_{k=1}^{\infty} \overset{-1}{f}_{n+k}(G_n).$$

注意 $\overset{-1}{f}_{n+k}(G_n) = C\overset{-1}{f}_{n+k}(CG_n)$，而 CG_n 是閉集、$f_{n+k} \in \mathscr{B}^*$，所以 $\overset{-1}{f}_{n+k}(CG_n)$ 是 Borel 可測集，從而它的補集 $\overset{-1}{f}_{n+k}(G_n)$ 也是 Borel 可測集。於是 $\overset{-1}{f}(A)$ 也是 Borel 可測集。但 $\mathscr{B}^*$ 顯然包含一切連續映像，從而 $\mathscr{B}^* \supset \mathscr{B}_0$ 證完。

系． 設 f 是按 Borel 可測的映像，而 A 是 E_0 中的 Borel 可測集，那末 $\overset{-1}{f}(A)$ 是 E 中 Borel 可測集。

註．特別，如果 f 是解析地可表現的，那末對於 E_0 中每個 Borel 可測集，$\overset{-1}{f}(A)$ 在 E 中是 Borel 可測集。

證．令 $\mathfrak{B}_E$ 表示 E 中 Borel 可測集的全體，而

$$\mathfrak{S} = \{X \mid X \subset E_0, \overset{-1}{f}(X) \in \mathfrak{B}_E\}.$$

今證 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{P}(E_0)$ 中的子 σ-代數。事實上，

$$X \in \mathfrak{S} \Longrightarrow \overset{-1}{f}(CX) = C\overset{-1}{f}(X) \in \mathfrak{B}_E,$$

$$X_n \in \mathfrak{S} \Longrightarrow \overset{-1}{f}\left(\bigcup_n X_n\right) = \bigcup \overset{-1}{f}(X_n) \in \mathfrak{B}_E.$$

但 $\mathfrak{S}$ 包含 E_0 中一切閉集,因為 f 是 Borel 可測的. 所以 $\mathfrak{S}$ 包含 $\mathfrak{P}(E_0)$ 中由一切閉集產生的最小子 σ-代數, 即 $\mathfrak{S}$ 包含 E_0 中一切 Borel 可測集.

註. 定理 1 的逆一般不成立, 即按 Borel 可測的映像不必是解析地可表現的.

例. 令 $E = R$, $E_0 = \{0, 1\}$是由兩點形成的散空間;令 f 表示由一個點 $x_0 \in E$ 組成的集$\{x_0\}$的特徵函數: $f = \chi_{\{x_0\}}$, 那末

$$\overset{-1}{f}(\{0\}) = C\{x_0\},\ \overset{-1}{f}(\{1\}) = \{x_0\},$$
$$\overset{-1}{f}(\phi) = \phi, \qquad \overset{-1}{f}(E_0) = E.$$

所以 f 是按 Borel 可測的. 但 f 不是解析地可表現的. 事實上, E_0^E 中每個連續映像必是常值函數(因為 E 是連通的, 而 E_0 只含兩個孤立點),所以由連續映像取極限只能仍得常值函數.

但是對於 $E_0 = R$ 時,逆定理成立.

定理 2. 設 E 是任意距離空間, $E_0 = R$, 那末 Borel 可測映像必是解析地可表現的.

註. 換句話說, 在任意距離空間 E 上, Borel 可測函數的全體與 Baire 各類函數的全體是相同的.

證. 由定義 1 下例已知 E 中閉集的特徵函數是解析地可表現的. 注意 Borel 集乃是滿足下列條件的最小集族 $\mathfrak{B}$ 中的集: 1° 閉集在 $\mathfrak{B}$ 中; 2° $X \in \mathfrak{B} \Longrightarrow CX \in \mathfrak{B}$; $X_n \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \bigcap_n X_n \in \mathfrak{B}$. 又因

$$\chi_X = 1 - \chi_{CX},\ \chi_{X_1 \cap X_2} = \chi_{X_1} \cdot \chi_{X_2},$$

$$\chi_{\bigcap_n X_n} = \lim_{n\to\infty} \chi_{\bigcap_{k=1}^{n} X_k} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \chi_{X_k}.$$

而解析地可表現的函數族對於乘法也是封閉的, 從而可知任意 Borel 集的特徵函數必是解析地可表現的. 今設 f 是任意 Borel 可測函數, 於是令

$$f_n(x) \equiv \min(\max(f(x), n), -n),$$

f_n 是有界 Borel 可測函數,因爲對於 $A \subset R$,

$$\max(f(x), n) \in A \Longleftrightarrow x \in A \cap (-\infty, n).$$

這時 $f = \lim f_n$,從而只須考察有界 Borel 可測函數 f 的情形. 今設 $|f(x)| \leqslant M(x \in E)$. 取 $[-M, M]$ 的分割 $-M = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < < \alpha_n = M$,使

$$\alpha_{i+1} - \alpha_i < \varepsilon (0 \leqslant i \leqslant n-1).$$

於是 $E_i = \{x | \alpha_i \leqslant f(x) < \alpha_{i+1}\}$ 是 Borel 集,而

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x) \right| < \varepsilon \quad (x \in E),$$

從而 f 是解析地可表現的.

定義 3. E_0^E 中的元 f 叫做具有廣義 Baire 性質的,是指存在 E 中一個第一綱集 P,使 f 在 $E \setminus P$ 上是連續的.

註. K. Kuratowski 原稱這種映像是 β-連續的,而另定義 α-連續映像爲其不連續點組成第一綱集的映像. 顯然, α 連續性蘊涵 β 連續性,但逆命題不成立.

例. 設 $E = E_0 = R$,而 χ_Q 是有理數集 Q 的特徵函數. 因 Q 在 R 中是第一綱集,而在 $E \setminus Q$ 上 $\chi_Q(x) = 0$,所以是在 $E \setminus Q$ 上連續的,即 χ_Q 是 β-連續的. 旣然 $\chi_Q(x)$ 在每一點不連續,而全直綫不是第一綱集,χ_Q 不是 α-連續的.

定義 4. E_0^E 中的元 f 叫做具有狹義 Baire 性質的,是指對於 E 中每個不空完集 P,必存在一個相對於 P 是第一綱的集 B,使 f 限制在子空間 $P \setminus B$ 上是連續映像.

定理 3. 爲了 f 是具有狹義 Baire 性質的,必須且只須對於 E 中任意集 H,存在一個相對於 H 是第一綱的集 B,使 f 限制在 $H \setminus B$ 上是連續的.

證. 充分性不待證. 爲了證明必要性,先注意集 H 的閉包 $\overline{H}$ 可以表示成 $\overline{H} = P \cup C$,這裏 P 是完集,C 是散播集. 依本定理的條件,存在一個相對於 P 是第一綱的集(從而相對於 $\overline{H}$ 更是第一綱的) B_1,使 f

限制在 $P\setminus B_1$ 上是連續的．於是對於 E_0 中每個開集 A，

$$\overset{-1}{f}(A)\cap(P\setminus B_1)=(\overset{-1}{f}(A)\cap P)\setminus B_1$$

是 $P\setminus B_1$ 中的開集，即存在開集 $O\subset E$，使

$$(\overset{-1}{f}(A)\cap P)\setminus B_1=(O\cap P)\setminus B_1.$$

但閉集的緣集是疏的，所以

$$P\setminus\overset{\circ}{P}=P\cap\overline{CP}=\overline{P}\cap\overline{CP}=\mathrm{fr}(P)$$

是疏集．令 $\mathrm{fr}(P)\cup B_1=B_2$，那末

$$(\overset{-1}{f}(A)\cap P)\setminus B_2=(O\cap\overset{\circ}{P})\setminus B_2=O_1\setminus B_2,$$

這裏 $O_1=O\cap\overset{\circ}{P}$ 是開集．又 $\overset{-1}{f}(A)\cap C$ 既是散播集 C 的子集，也是散播集，所以 $\overset{-1}{f}(A)\cap C=G\cup B_3$，這裏 G 是開集，B_3 是疏集．於是

$$\begin{aligned}\overset{-1}{f}(A)\cap(\overline{H}\setminus(B_2\cup B_3))&=[(\overset{-1}{f}(A)\cap P)\setminus(B_2\setminus B_3)]\cup\\&\cup[(\overset{-1}{f}(A)\cap C)\setminus(B_2\cup B_3)]=\\&=[O_1\setminus(B_2\cup B_3)]\cup[G\setminus(B_2\cup B_3)]=\\&=[(O_1\cup G)\setminus(B_2\cup B_3)]\end{aligned}$$

是 $E\setminus(B_2\cup B_3)$ 中的開集，從而更是 $\overline{H}\setminus(B_2\cup B_3)$ 中的開集．但 $B\equiv B_2\cup B_3=\mathrm{fr}(P)\cup B_1\cup B_3$ 是第一綱集，而 f 在 $\overline{H}\setminus B$ 上連續，從而在 $H\setminus B$ 上連續．證完．

系．具有狹義 Baire 性質的映像必具有廣義 Baire 性質．

證．只須在定理 3 中取 $H=E$．

定理 4．爲了距離空間 E 中的集 A 是具有廣義(狹義) Baire 性質的，必須且只須它的特徵函數 χ_A 是具有廣義(狹義) Baire 性質的．

證．1)因

$$\overset{-1}{\chi_A}(\phi)=\phi,\ \overset{-1}{\chi_A}(\{0,1\})=E,\ \overset{-1}{\chi_A}(\{0\})=E\setminus A,$$
$$\overset{-1}{\chi_A}(\{1\})=A,$$

所以，如果 A 具有廣義 Baire 性質，$E\setminus A$ 也具廣義 Baire 性質，從而存在第一綱集 B，使 $A\setminus B$ 與 $(E\setminus A)\setminus B$ 在 $E\setminus B$ 中是閉集(§2 定理 2，3))，即 χ_A 在 $E\setminus B$ 上是連續的．於是 χ_A 具有廣義 Ba-

ire 性質. 反之,設 χ_A 具有廣義 Baire 性質,那末存在第一綱集 B,使 χ_A 在 $E\setminus B$ 上是連續的,從而

$$\overset{-1}{\chi_A}(\{0\})\cap(E\setminus B)=(E\setminus A)\setminus B$$

及

$$\overset{-1}{\chi_A}(\{1\})\cap(E\setminus B)=A\setminus B$$

都是 $E\setminus B$ 中的閉集,即 $A\setminus B$ 在 $E\setminus B$ 中是既開且閉的,從而依§2 定理 2, A 是具有廣義 Baire 性質的.

2) 爲了 χ_A 具有狹義 Baire 性質,必須且只須對於E中每個不空完集 P, χ_A 限制在P上是具有廣義 Baire 性質的,而依 1) 必須且只須對於E中每個不空完集 P, $A\cap P$ 在P中是具有廣義 Baire 性質的. 依§2 定理 4, 必須且只須A具有狹義 Baire 性質.

定理 4. 第一類解析地可表現的映像必是 α-連續的,換句話說,設 $f_n\in E_0^E$ 是連續映像, 而 $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$, 那末 f 的間斷點所組成的集D在E中是第一綱的.

證. 令 $\omega(x)$ 表示 f 在 x 點處的"擺幅":

$$\omega(x)\equiv\inf_{U\in\mathfrak{V}(x)}\delta(f(U)),$$

這裏 $\delta(X)$ 表示集X的直徑, 而 $\mathfrak{V}(x)$表示 x 點在E中的鄰域組. 令 $\varepsilon>0$,

$$E(\varepsilon)=\{x|x\in E,\omega(x)\geqslant\varepsilon\},$$

那末

$$D=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{1}{n}\right),$$

從而只須證對於每個 $\varepsilon>0$, $E(\varepsilon)$是第一綱集. 令

$$A_{k,m}\equiv\left\{x|\rho(f_m(x),f_k(x))\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\},$$

$$A_k\equiv\bigcap_{m>k}A_{k,m}\equiv\left\{x|m>k\Longrightarrow\rho(f_m(x),f_k(x))\leqslant\frac{\varepsilon}{4}\right\}.$$

因距離 $\rho(x,y)$是 x, y 的連續函數,而 f_n 是連續映像,可知 $A_{k,m}$ 是閉集,從而 A_k 也是閉集. 於是 $Fr(A_k)$是疏集. 因 f_k 是收斂的,所以

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

即

$$E(\varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E(\varepsilon) \cap A_k).$$

我們只須證明 $E(\varepsilon) \cap A_k \subset Fr(A_k)$ 或 $E(\varepsilon) \cap \mathring{A}_k = \phi$，就可知道 $E(\varepsilon) \cap$ $\cap A_k$ 是疏集，從而 $E(\varepsilon)$ 是第一綱集。

事實上，設 $x \in \mathring{A}_k$。f_k 既是連續的，必存在開集 G，使

$$x \in G \subset \mathring{A}_k \subset A_k, \text{ 而 } \delta(f_k(G)) < \frac{\varepsilon}{4},$$

這是由取 G，使 $y \in G \Longrightarrow \rho(f_k(x), f_k(y)) < \frac{\varepsilon}{8}$ 而推出。令 $x', x'' \in$ $\in G$，那末

$$\rho(f(x'), f_k(x')) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \ \rho(f(x''), \ f_k(x'')) \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\rho(f_k(x'), f_k(x'')) \leqslant \frac{\varepsilon}{4},$$

從而

$$\rho(f(\lambda'), f(x'')) \leqslant \frac{3\varepsilon}{4}, \text{ 即 } \delta(f(G)) < \varepsilon.$$

這正是說 $\omega(x) < \varepsilon$，從而 $x \notin E(\varepsilon)$。證完。

定理 5. 設 $f_n \in E_0^E$ 是具有廣義(狹義) Baire 性質的映像，而 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$，那末 f 是具有廣義(狹義) Baire 性質的。

證. 1) 設 f_n 是具有廣義 Baire 性質的。依定義，存在第一綱集 B_n，使 f_n 在 $E \setminus B_n$ 上是連續的。令 $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$，$B$ 也是第一綱集；在 $E \setminus B$ 上每個 f_n 是連續的。依定理 4，f 在 $E \setminus B$ 上是 α-連續的，從而有一相對於 $E \setminus B$ 是第一綱的集 H，使 f 在 $E \setminus (B \cup H)$ 上是連續的。但 H 相對於 E 更是第一綱的，從而 $B \cup H$ 在 E 中是第一綱集。於是 f 是具有廣義 Baire 性質的。

2）關於狹義 Baire 性質的部分，採用"相對拓撲結構"就可以與1)同樣地證出。

系. 解析地可表現的映像必具有狹義 Baire 性質。

證. 依定理5，具有狹義 Baire 性質的映像在 E_0^E 中組成閉族。這個閉族包含一切連續映像，從而也包含由連續映像所產生的最小閉族，即包含一切解析地可表現的映像。

關於 Baire 性質與屬於度量性質的可測性的比較的研究，近來受到注意。請參看楊宗磐著，關於貝爾性質的幾點注意 I，數學學報，6(1956)，83—90；II，數學學報，8(1958)，95—101。又請參看 Гладкий, А. В., О взаймоотношении между дескриптивной измеримостью, абсолютной измеримостью и свойствам Бэра, Матем. сб., 41(1957), 3—6。又 Marcus, S., Contribuţii la o analizo u functiilor reale bazată pe notiunta de categorie in sensul dui Baire, Studii şc Cerc. Mat., 7(1956), 251—272。

第七章　拓　撲　羣

§1.　羣上的拓撲結構

下面考察的羣,一般是指不必交換的,並表示成乘法羣.

定義 1. 羣 G 上的拓撲結構叫做與它的羣結構符合,是指

1° 由 $G\times G$ 到 G 中的映像 $(x, y)\to x\cdot y$ 是連續的;

2° 由 G 到 G 中的映像 $x\to x^{-1}$ 是連續的.

當羣 G 上有一與羣結構相符合的拓撲結構時, G 叫做拓撲羣.

例 1.　數直綫 R 的拓撲結構是與它的加羣結構相符合的, 從而是拓撲羣.

例 2.　任意羣上的散拓撲結構必與它的羣結構符合, 這種拓撲羣叫做散羣.

例 3.　任意羣上的最粗拓撲結構必與它的羣結構相符合.

定理 1. 設羣 G 上有一拓撲結構,爲了 G 是拓撲羣,必須且只須下列條件滿足:由 $G\times G$ 到 G 中的映像 $(x, y)\to xy^{-1}$ 是連續的.

證. 設 φ 表示由 $G\times G$ 到 G 中的映像 $(x, y)\to xy$, 而 ψ 表示由 $G\times G$ 到 $G\times G$ 中的映像 $(x,y)\to(x, y^{-1})$, 那末映像 $(x, y)\to xy^{-1}$ 可以表示成 $\varphi\circ\psi$, 從而當 φ, ψ 是連續時, $\varphi\circ\psi$ 也連續. 而由積空間的定義,爲了 ψ 連續,必須且只須 $y\to y^{-1}$ 是連續的. 反之, 設 e 表示羣 G 的主單位元,那末由定理的條件可知 $y\to(e, y)\to ey^{-1}\equiv y^{-1}$ 連續, 而由此, $(x, y)\to(x, y^{-1})\to x(y^{-1})^{-1}\equiv xy$ 是連續的. 證完.

在拓撲羣 G 中,對於任意固定元 a, 由 $\varphi_a(x)=ax$ 決定的映像 φ_a 是由 G 到 G 上的連續映像,它的逆映像是 $\varphi_{a^{-1}}$, 從而是一對一的, 並且 $\overset{-1}{\varphi_a}=\varphi_{a^{-1}}$ 也是連續的. 這說明 φ_a 是由 G 到 G 上的同胚;這個同胚叫做左平移. 同理,由 G 到 G 上的映像 $x\to xa$ 叫做右平移;這也是同胚. 同理 $x\to x^{-1}$ 是由 G 到 G 上的同胚. 由此, 如果 A 是 G 中一個開集或

閉集，$a\cdot A\equiv\{ax|x\in A\}$，$A\cdot a\equiv\{xa|x\in A\}$，$A^{-1}\equiv\{x^{-1}|x\in A\}$都相應地各是開集或閉集．如果$A$是開集，$B$是任意集，集

$$AB\equiv\{a\cdot b|a\in A,\ b\in B\}=\bigcup_{b\in B}A\cdot b\text{ 與 }BA$$

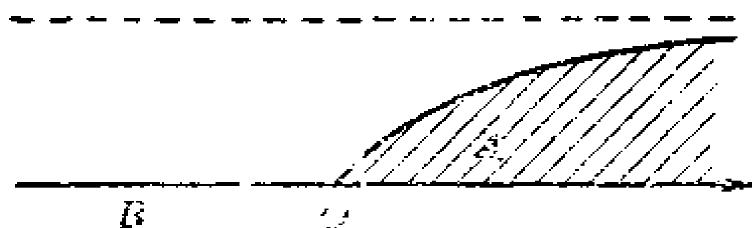
也都是開集．注意，AB是G中的集，與$G\times G$中的子集$A\times B\equiv\equiv\{(a,b)|a\in A,\ b\in B\}$完全不同．

注意，如果A，B都是閉集，AB未必是閉集．

例．在加羣$R\times R$中，令

$$A=\left\{(x,y)|x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant 1-\frac{1}{x+1}\right\},$$

$$B=\{(x,0)|x\in R\},$$



那末A，B都是閉集，但$A+B=\{(x,y)|0\leqslant y<1\}$，從而並非$R\times R$中的閉集．

拓撲羣中各點的鄰域彼此有密切的關係．實際上，如果$\mathfrak{V}\equiv\mathfrak{V}(e)$是主單位元$e$的完全鄰域組，那末，由於$x\to ax$與$x\to xa$都是由$G$到$G$上的同胚，$\{aV|V\in\mathfrak{V}\}$與$\{Va|V\in\mathfrak{V}\}$就是點$a$的完全鄰域組，從而$\mathfrak{V}$就完全能確定拓撲羣的拓撲結構．現在試求$\mathfrak{V}$的特徵．首先，它是$G$中子集所組成的一個滲透．由於$(x,y)\to xy$在點$e$處的連續性，對於$e\cdot e=e$的任意鄰域$U\in\mathfrak{V}$，必存在$e$的鄰域$V$，使$V\cdot V\subset U$．因$x\to x^{-1}$是同胚，對於$e$的任意鄰域$U\in\mathfrak{V}$，必存在$V\in\mathfrak{V}$，使$V^{-1}\subset U$，即$V\subset U^{-1}$，從而$U^{-1}\in\mathfrak{V}$．$e\in U$對每個$U\in\mathfrak{V}$成立．又因$x\to axa^{-1}$也是由$G$到$G$上的同胚，所以$V\in\mathfrak{V}\Longrightarrow aVa^{-1}\in\mathfrak{V}$．這幾個性質恰恰構成拓撲羣中主單位元$e$的完全鄰域組所必須滿足的條件．

定理 2. 設G是羣，爲了滲透$\mathfrak{V}$構成某個與G的羣結構符合的拓

撲結構中點 e 的完全鄰域組，必須且只須 $\mathfrak{V}$ 滿足下列四個條件：

1° $U \in \mathfrak{V} \Longrightarrow \exists V \in \mathfrak{V},\ V \cdot V \subset U$;

2° $U \in \mathfrak{V} \Longrightarrow U^{-1} \in \mathfrak{V}$;

3° $V \in \mathfrak{V} \Longrightarrow e \in V$;

4° $V \in \mathfrak{V},\ a \in G \Longrightarrow aVa^{-1} \in \mathfrak{V}$.

當這四個條件滿足時，恰存在一個與 G 的羣結構相符合的拓撲結構，使當 G 上賦以這個拓撲結構而成爲拓撲羣時，$\mathfrak{V}$ 恰是 G 中主單位元 e 的完全鄰域組，而 $\{a\cdot V | V \in \mathfrak{V}\} = \{Va | V \in \mathfrak{V}\}$ 是 G 中元 a 的完全鄰域組。

證． 必要性已經在上面證明了． 如果已證明 $\mathfrak{V}$ 是按某拓撲結構羣中元 e 的完全鄰域組，那末 $\{a \cdot V | V \in \mathfrak{V}\}$ 就是點 a 的完全鄰域組，從而所論的拓撲結構由 $\mathfrak{V}$ 一意決定． 現在只須證明 $\{a\cdot V | V \in \mathfrak{V}\}$ 確是 G 上某拓撲結構中點 a 的完全鄰域組，並且這個拓撲結構與 G 的羣結構相符．

由 3° 知 $a \in a \cdot V (V \in \mathfrak{V})$，而由於 $\mathfrak{V}$ 是滲透，$\{a \cdot V | V \in \mathfrak{V}\}$ 也是滲透，從而爲了證明 $\mathfrak{V}$ 滿足鄰域組四個公理，只須證明 $aV \in \mathfrak{V}(a) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \exists W \in \mathfrak{V}$，使 $x \in aW \Longrightarrow aV \in \mathfrak{V}(x)$． 事實上，按 1° 取 $W \in \mathfrak{V}$，使 $W \cdot W \subset V$． 設 $x \in a \cdot W$，那末 $x \cdot W \subset a \cdot W \cdot W \subset a \cdot V$，即 $a \cdot$ $\cdot V \in \mathfrak{V}(x)$．

現在證明由 $\mathfrak{V}$ 決定的拓撲結構使 $(x, y) \to xy^{-1}$ 連續． 設 $a, b \in$ $\in G$． 我們要證明對於任意 $U \in \mathfrak{V}$，存在 $W \in \mathfrak{V}$，使 $x \in a \cdot W$, $y \in b \cdot$ $\cdot W \Longrightarrow xy^{-1}G(ab^{-1})U$． 但如果 $x \in aW$, $y \in bW$，必存在 $u, v \in W$，使 $x = au$, $y = bv$，從而 $xy^{-1} = auv^{-1}b^{-1}$；而爲了使 $xy^{-1} \in (ab^{-1})U$，必須能使 $uv^{-1}b^{-1} \in b^{-1}U$，即 $uv^{-1} \in b^{-1}Ub$．爲此，因按 4°，$b^{-1}Ub \in \mathfrak{V}$，所以，可按 1° 取 V，使 $V \subset b^{-1}Ub$，再按 2°，令 $W = V \cap V^{-1}$（所以 $W \in \mathfrak{V}$），於是

$$u, v \in W \Longrightarrow uv^{-1} \in V \cdot V \subset b^{-1}Ub.$$

證完．

註． 1） 條件 1°，2° 等價於下列條件：

$$U \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \exists V \in \mathfrak{B},\ V \cdot V^{-1} \subset U.$$

實際上,在上定理的證明過程中已證明了這點. 今從略.

2) 在實用中往往只須決定 e 的基本鄰域組,而不需要完全鄰域組. 爲此,我們提出 e 的基本鄰域組的特徵:它是一個滲透基,滿足下列條件:

1° $U \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \exists V \in \mathfrak{B},\ V \cdot V \subset U$;

2° $U \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \exists V \in \mathfrak{B},\ V^{-1} \subset U$;

3° $V \in \mathfrak{B} \Longrightarrow e \in V$;

4° $a \in G,\ U \in \mathfrak{B} \Longrightarrow \exists V \in \mathfrak{B}$, 使 $V \subset aUa^{-1}$.

3) 拓撲羣中集 V 叫做對稱的,是指 $V = V^{-1}$. e 的對稱鄰域組成基本鄰域組. 實際上,依定理 2 的 2°, $U \in \mathfrak{B} \Longrightarrow U^{-1} \in \mathfrak{B}$,從而 $V \equiv U \cap \cap U^{-1}$ 是對稱鄰域,且 $V \subset U$.

4) 對於構成交換羣的任意集 V, $aVa^{-1} = V$, 從而定理 2 的條件 4° 是不足道的.

定理 3. 爲了拓撲羣 G 是 (T_2) 型空間,必須且只須單元集 $\{e\}$ 是閉的.

證. 這意味着:爲了拓撲羣是 (T_2) 型的,必須且只須它是 (T_1) 型的,因爲如 $\{e\}$ 是閉的,對任意 $a \in G$, $\{a\}$ 是閉的.

必要性是顯然的. 反之,設 $\{e\}$ 是閉集. $G \times G$ 中對角綫集 D 乃是 G 中集 $\{e\}$ 按連續映像 $(x, y) \to xy^{-1}$ 的原像,從而是閉的. 依第一章的結果, G 是 (T_2) 型的.

系. 爲了拓撲羣 G 是 (T_2) 型的,必須且只須

$$\bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V = \{e\}. \tag{1}$$

證. 必要性不待證. 設定理的條件成立,今證 $\{e\}$ 是閉集. 設 $x \neq e$, 存在 $V \in \mathfrak{B}$, 使 $V \not\ni x^{-1}$, 從而 $e \notin xV$, 即 x 的鄰域 xV 與 $\{e\}$ 不相交. 所以 $\{e\}$ 是閉的.

註. 更進一步,可以證明,如拓撲羣 G 是 (T_0) 型空間,它必是 (T_2) 型的. 實際上,如果 G 是 (T_0) 型的, 那末對於任意一點 $x \neq e$, 或 e 有一

鄰域 V 不含 x，或 x 有一鄰域 xV，$(V\in\mathfrak{B})$，使 $xV\ni e$。如果是後者，必然 $x\notin V^{-1}$，$V^{-1}\in\mathfrak{B}$，從而無論如何，(1) 成立；於是 G 是 (T_2) 型的。

例．非 (T_0) 型的拓撲羣的例是很容易舉的，例如賦以最粗拓撲結構的任意羣．又如設羣 G 有一眞正規子羣 N（即 $\{e\}\subsetneqq N\subsetneqq G$），而取 $\{N\}$（由 N 個集組成的集族）作爲 e 的鄰域滲透基，那末定理 2 下註 2 中的條件 $1°, 2°, 3°, 4°$ 都對 $U=V$ 成立，因爲這些性質恰是正規子羣的性質．於是 G 成爲非 (T_0) 型的拓撲羣．

定義 2. 由拓撲羣 G 到拓撲羣 G_1 上的映像 φ 叫做同構，是指

$1°$　φ 是代數同構，即 φ 是一對一映像，且 $\varphi(xy)=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$ 對任意 $x, y\in G$ 成立；

$2°$　φ 是同胚，即 φ 與 $\overset{-1}{\varphi}$ 都是連續的．

拓撲羣 G, G_1 叫做同構，是指存在由 G 到 G_1 上的同構映像．

註．由前所述羣論中的知識可知 $x\to axa^{-1}(\equiv\alpha_a(x))$ 是由 G 到 G 自己之上的同構，依羣論的用語，這種同構叫做內自同構． 一般，由拓撲羣到它自己之上的同構叫做自同構．

例．一切複數全體組成一個拓撲加羣．這裏的拓撲結構是指平常複數平面（不包括無窮遠點）的拓撲結構． 設 $\bar{\alpha}$ 表示複數 α 的共軛複數，那末 $\alpha\to\bar{\alpha}$ 是自同構．這個自同構顯然不是內自同構，因爲交換羣的唯一內自同構必是不變映像．

定義 3. 設 G 是拓撲羣．羣 G 的子羣 H，賦以相對拓撲結構、即把 H 看成拓撲空間 G 的子空間，叫做 G 的拓撲子羣．

註．拓撲子羣是拓撲羣．H 中 e 的完全鄰域組乃是

$$\mathfrak{B}_H\equiv\{V\cap H\,|\,V\in\mathfrak{B}\},$$

$\mathfrak{B}$ 是 G 中 e 的完全鄰域組． 事實上，定理 2 的條件 $1°, 2°, 3°, 4°$ 都不難驗明．

定理 4. 拓撲羣 G 中的子羣 H 的閉包 $\overline{H}$ 仍是 G 的子羣． 如果 H 是正規子羣，$\overline{H}$ 也是正規的．

證．設 $a, b\in\overline{H}$．因 $(x, y)\to xy^{-1}$ 是由 $G\times G$ 到 G 中的連續映像，所以它也是由 $H\times H$ 到 H 中的連續映像，從而也把 $H\times H$ 在 $G\times$

$\times G$ 中的閉包，即 $\overline{H}\times\overline{H}$，映到 $\overline{H}$ 中，這證明 $\overline{H}$ 是子羣． 如果 H 是正規子羣，H 在同胚映像 $x\to axa^{-1}$ 之下不變，從而 $\overline{H}$ 也不變，即 $\overline{H}$ 是正規的。

註．特別，單元集 $\{e\}$ 的閉包 N 是正規子羣，而爲了 $N=\{e\}$，必須且只須 G 是 (T_2) 型的。

定理 5. 爲了子羣 H 是閉的，必須且只須存在開集 U，使

$$U\cap H=U\cap\overline{H}\neq\phi.$$

證．充分性．設定理中條件成立；設 $a\in\overline{H}$，$c\in U\cap H$，於是 $\exists V\in\in\mathfrak{V}$，使 $cV\subset U$． 既然 $a\in\overline{H}$，$\exists b\in H$，使 $b\in Va$，即 $ba^{-1}\in V$．由此 $cba^{-1}\in cV\subset U$，而因 a^{-1}，b，$c\in\overline{H}$，可知 $cba^{-1}\in U\cap\overline{H}=U\cap H$．即 $cba^{-1}\in H$． 但 $cb\in H$，所以 $a\in H$．這意味着 $\overline{H}\subset H$，即 H 是閉的．必要性不待證．

系． 如子羣 H 不是閉的，$\overline{H}\cap CH$ 必在 $\overline{H}$ 中稠．

證． 如果 $\overline{H}\cap CH$ 在 $\overline{H}$ 中不稠，必有一開集 U，使 $U\cap\overline{H}=\phi$，而

$$(\overline{H}\cap CH)\cap U\cap\overline{H}=\phi,$$

即 $U\cap\overline{H}=U\cap\overline{H}\cap(CH\cup H)=U\cap\overline{H}\cap H=U\cap H$．依定理 5，$H$ 是閉的．證完．

定理 6. 爲了子羣 H 是開的，必須且只須它有一個內點． 開子羣必也是閉的。

證．設 $a\in\mathring{H}$，必存在 $V\in\mathfrak{V}$，使 $aV\subset H$．對於任意 $x\in H$，由於 H 是子羣，$xV=(xa^{-1})\cdot aV\subset H$，從而 $x\in\mathring{H}$，即 $H\subset\mathring{H}$，H 是開集．如果 H 是開子羣，那末

$$CH=\bigcup_{x\notin H}xH$$

是開集的併，從而是開的，於是 H 是閉集。

定理 7. 連通羣由它的主單位元的任意鄰域生成，即它是包含這個鄰域的最小子羣。

證．設 $V\in\mathfrak{V}$，無妨設 $V=V^{-1}$，於是由 V 生成的子羣 H 就是含

V 的最小子羣,它 $= \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$, 這裏

$$V^n = \{x_1 \cdots x_n \mid x_i \in V (1 \leqslant i \leqslant n)\}.$$

因爲 $V \subset H$,所以 $e \in \mathring{H}$, 從而依定理 6, H 是開的,並且也是閉的. H 既是旣開且閉集,它必包含 e 的連通分. 如果 G 是連通的,必然 $G \subset H$, 即 $G = H$. 證完.

定理 8. 在拓撲羣 G 中,主單位元的連通分 K 是閉正規子羣,並且任意點 x 的連通分等於 $x \cdot K = K \cdot x$.

證. 如 $a \in K$, $a^{-1}K$ 是含 e 的連通集, 從而 $a^{-1}K \subset K$, $K^{-1}K \subset K$, 證明了 K 是 G 的子羣. 因 xKx^{-1} 仍是含 e 的連通集,從而 $xKx^{-1} \subset K$, 即 K 是正規子羣. 連通分是閉集, 這是已知的 (第一章). 對於任意 $a \in G$, 因 $x \to ax$ 與 $x \to xa$ 是同胚, 所以 aK 與 Ka 是含 a 的最大連通集,從而它們都是含 a 的連通分.

定理 9. 設 H 爲拓撲羣 G 中的稠子羣,又設 K 是 H 的正規子羣,則 K 的閉包 $\overline{K}$ 是 G 的一個正規子羣.

證. 映像 $(z,x) \to zxz^{-1}$ 在 $G \times G$ 中連續,而這映像把 $H \times K$ 映到 K 是連續的; 所以它把 $G \times \overline{K} = \overline{N} \times \overline{K}$ 映到 $\overline{K}$ 也是連續的(見第一章定理).

定理 10. 設 H 爲拓撲羣 G 中的稠子羣,又設 H 是由 H 中單位元素的任一鄰域所生成,則 G 也是由 G 中單位元素的任一鄰域所生成.

證. 事實上, 設 $V \in \mathfrak{B}(e)$ 是 e 的任一對稱鄰域, $V \cap H$ 是 H 中單位元素的一個鄰域, 由它生成 H, 所以, V 生成包含 H 的一個子羣 H'. 但 H' 是旣開且閉的(定理 6), 故閉包 $\overline{H} = G$.

設 H 是拓撲羣 G 的正規子羣, 按照等價關係 H: $x \equiv y\,(H) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x^{-1}y \in H \Longleftrightarrow yx^{-1} \in H$, 商空間 G/H 同時是一個羣 (原來羣按 H 的商羣). 現在考察 G/H 上的商空間結構與商羣結構是否符合.

定理 11. 由 G 到 G/H 上的典範映像 φ: $\varphi(x) = \dot{x}$($\dot{x}$ 表 G/H 中含 x 的剩餘類)是開映像,即把 G 中開集映成 G/H 中的開集.

證. 我們知道, 爲了證明 $\varphi(A)$ 是 G/H 中的開集, 只須證明

$\overset{-1}{\varphi}(\varphi(A))$是開集(第一章§3, 定義5下的註)。但如果$A$是$G$中開集，

$$\overset{-1}{\varphi}(\varphi(A)) = AH = \bigcup_{x \in H} Ax$$

是開集的併，從而仍是開集。

系. 如果$\mathfrak{V}$是拓撲羣G中主單位元的一個基本鄰域組，那末$\{\varphi(V)|V\in\mathfrak{V}\}$是$G/H$中主單位元的一個基本鄰域組。

證. 由定理11可知$V\in\mathfrak{V}\Longrightarrow\varphi(V)$是$G/H$中主單位元的鄰域。設$V_1\in\mathfrak{V}(\varphi(e))$(在$G/H$中)。由於$\varphi$是連續的，$\overset{-1}{\varphi}(V_1)$是$e$的鄰域，從而$\exists V\in\mathfrak{V}$，使$V\subset\overset{-1}{\varphi}(V_1)$，即$\varphi(V)\subset V_1$。證明了$\{\varphi(V)\}$是基本鄰域組。

定理12. 設H是拓撲羣G的子羣，那末上述G/H上的商拓撲結構與商羣結構相符合，從而G/H是拓撲羣。爲了G/H是(T_2)型的，必須且只須H是G中閉子羣。

證. 由於等價關係，$x^{-1}y\in H\Longleftrightarrow x\equiv y(H)$是開的(即$A$開，$B$開$\Longrightarrow A^{-1}B$開)，拓撲空間$(G/H)x(G/H)$與$(G\times G)/(H\times H)$同胚[1]。爲了證明$G/H$是拓撲羣，只須證明$(\dot{x},\dot{y})\to\dot{x}\,\dot{y}^{-1}$是連續的，而由於上述的同胚以及典範映像的特點，只須證$(x,y)\to\dot{x}\,\dot{y}^{-1}$是由$G\times G$到$G/H$中的連續映像。我們可以把這個映像看作是由映像$(x,y)\to$
$\to xy^{-1}$(由$G\times G$到G)與映像$x\to\dot{x}$(在這映像下，$\overset{\cdot}{(xy^{-1})}=\dot{x}\dot{y}^{-1}$)的疊合，而這兩個映像確是連續的。

設G/H是(T_2)型的，它的主單位元組成的單元集是閉的，從而$H=\overset{-1}{\varphi}(\{\dot{e}\})$是閉集。反之，設$H$是閉集，$C=\{(x,y)|x,y\in G,x^{-1}y\in\in H\}$乃是集$H$按映像$(x,y)\to x^{-1}y$的原像，從而$C$是$G\times G$中的閉

1) $E\xrightarrow{f}\frac{E}{\mathfrak{R}}$, $F\xrightarrow{g}\frac{F}{\mathfrak{S}}$, $E\times F\xrightarrow{h=(f,g)}\frac{E}{\mathfrak{R}}\times\frac{F}{\mathfrak{S}}$, $h(z)=h(z')\Longleftrightarrow x\equiv x'(\mathfrak{R})$, $y\equiv y'(\mathfrak{S})$, $(z=(x,y))$. 由$\frac{E\times F}{\mathfrak{R}\times\mathfrak{S}}$到$\frac{E}{\mathfrak{R}}\times\frac{F}{\mathfrak{S}}$上的一對一映像$\varphi$是連續的，因爲$h$連續。如$\mathfrak{R}$，$\mathfrak{S}$爲開等價關係(即$f$, g都是開映像)，那末φ是同胚，所以只須證h是開映像。爲此，只須就$U=A\times B$狀的開集。$A\subset E$, $B\subset F$都是開集，但$h(A\times B)=f(A)\times\times g(B)$，所以爲開。

集．依第一章的結果，G/H 是(T_2)型的．

如果 G 不是(T_2)型的，$\{e\}$的閉包 N 是一個閉正規子羣，從而 G/N 是(T_2)型的，叫做與 G 相伴的(T_2)型羣．

定理 13. 設 H 是拓撲羣 G 的開正規子羣，那末商羣 G/H 是散的．

證．對每個 $x\in G$，xH 是開集，並且按等價關係 $x^{-1}y\in H$ 是飽和的．所以它在典範映像下的像$\{\dot{x}\}$是 G/H 中的開集，從而 G/H 是散空間．

注意，由羣 G 到羣 G_1 上的表現是指由 G 到 G_1 中的映像 φ，使 $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\varphi(y)$。一對一的表現乃是同構（表現也叫做同態）．

定理 14. 為了由拓撲羣 G 到拓撲羣 G_1 中的表現 φ 是連續的，必須且只須它在點 e 處連續．

證．必要性不待證．反之，設 φ 在 e 處連續；設 V_1 是 G_1 中主單位元 e_1 的鄰域，$\overset{-1}{\varphi}(V_1)\equiv V$ 必是 e 的鄰域．對於 $x\in G$，$\varphi(xV)=\varphi(x)\cdot\varphi(V)\subset\varphi(x)V_1$，從而 φ 在 x 處也連續．證完．

設 φ 是由拓撲羣 G 到拓撲羣 G_1 中的連續表現，那末 $H\equiv\overset{-1}{\varphi}(e_1)$（$e_1$ 是 G_1 中的主單位元）是 G 中一個正規子羣，而 $\varphi(G)$是 G_1 的子羣．設 f_H 表示由 G 到 G/H 中的典範映像，ψ 表示由 $\varphi(G)$到 G_1 中的典範映像（即 G_1 中不變映像 ι_{G_1} 在 $\varphi(G)$上的限制），那末由

$$\varphi=\psi\circ\dot{\varphi}\circ f_H$$

定義的映像 $\dot{\varphi}$ 是由 G/H 到 G_1 的子羣 $\varphi(G)$ 上的一對一映像，並且 $\dot{\varphi}$ 是表現，並且由 f_H 的性質不難看出 $\dot{\varphi}$ 是連續的．$\dot{\varphi}$ 叫做伴隨 φ 的一意表現．$\dot{\varphi}$ 一般不是同構．

例．設 G 是散羣，G_1 是在 G 上賦以一個非散的且與羣結構相符合的拓撲結構而得出的拓撲羣（例如最粗拓撲結構）． 由 G 到 G_1 的不變映像 ι 乃是由 G 到 G_1 上的一對一連續映像（這時 $\iota=\dot{\iota}$），但不是雙方連續的！

定義 4. 由拓撲羣 G 到拓撲羣 G_1 中的表現 φ 叫做由 G 到 G_1 中的同態，是指上述的伴隨 φ 的一對一表現 $\dot{\varphi}$（由 G/H 到 $\varphi(G)$ 上）是同構（換句話說，$\dot{\varphi}$ 是雙方連續的）．

註．這一條件比較難於理解，現在證明一個易於理解的等價條件，然後再舉例．注意有些文獻稱表現爲同態，而稱同態爲開同態．

定理 15. 設 φ 是由拓撲羣 G 到拓撲羣 G_1 中的連續表現．爲了 φ 是由 G 到 G_1 中的同態，必須且只須下列兩條件的任意一個滿足：

1) φ 把 G 中每個開集映成 $\varphi(G)$ 中的開集，換句話說，φ 是開映像；

2) φ 把 G 中主單位元 e 的每個鄰域映成 $\varphi(G)$ 中主單位元的鄰域．

證．依定理 11，爲了 φ 是開映像，必須且只須 $\dot{\varphi}$ 是由 G/H 到 $\varphi(G)$ 中的開映像，因爲對於 G 中任意開集，爲了 $\varphi(O) = \psi\circ\dot{\varphi}\cdot f_H(O)$ 是開集，必須且只須 $\dot{\varphi}\cdot f_H(O)$ 是開集；而因 $f_H(O)$ 是開集（定理 11），必須且只須 $\dot{\varphi}$ 是開映像．但 $\dot{\varphi}$ 是一對一的，所以，必須且只須 $\dot{\varphi}$ 是雙方連續的．條件 1) 與 2) 的等價性不待證．

例．設 $\mathfrak{R}$ 表示實數集中的等價關係：

$$x\equiv y(\mathfrak{R})\Longleftrightarrow x\equiv y(\operatorname{mod} 1),$$

那末由 R 到圓周長爲 1 的圓周上的映像 $x\to e^{2\pi ix}$ 是同態．

設 $(G_\iota)_{\iota\in J}$ 是一族羣，積羣

$$G=\prod_{\iota\in J}G_\iota$$

是指元族 $(x_\iota)_{\iota\in J}(x_\iota\in G_\iota)$ 的全體按照

$$(x_\iota)(y_\iota)=(x_\iota y_\iota)(\iota\in J)$$

所形成的羣．在積羣 G 中，主單位元 e 是

$$e=(e_\iota)(e_\iota \text{ 是 } G_\iota \text{ 中的主單位元}),$$

而

$$(x_\iota)^{-1}=(x_\iota^{-1}).$$

如果 G_ι 都是拓撲羣，G 也可以看成是諸拓撲空間 G_ι 的積空間．這個積拓撲結構與積羣的結構相符合．事實上，由 $G\times G$ 到 G 中的映像

$$((x_\iota),(y_\iota))\to(x_\iota y_\iota^{-1}) \tag{2}$$

是由 $\prod_{\iota\in J}(G_\iota\times G_\iota)$ 到 G 中的映像 $((x_\iota,y_\iota))\to(x_\iota y_\iota^{-1})$ 與由 $G\times G$

到 $\prod_{\iota\in J}(G_\iota \times G_\iota)$中的映像$((x_\iota),(y_\iota)) \to ((x_\iota, y_\iota))$的疊合，而這兩個映像都是連續的，從而(2)是連續的。

定義 5. 一族拓撲羣$(G_\iota)_{\iota\in J}$的積羣

$$G = \prod_{\iota\in J} G_\iota$$

賦以積拓撲結構所成的拓撲羣叫做諸拓撲羣 G_ι 的積拓撲羣。

設$(J_x)_{x\in K}$是 I 的一個分割，則 G 與拓撲羣 $\prod_{\iota\in J_x} G_\iota$ 積同構（積的結合性）。

設 H_ι 是 G_ι 的子羣，則拓撲羣 H_ι 的積是同構與 ΠG_ι 的子羣 $\prod_\iota H_\iota$。特別、設 J 是 I 的任意子集，$J' = CJ$，則拓撲羣 $\prod_{\iota\in J} G_\iota$ 是同構於G的正規子羣 $G'_J = \left(\prod_{\iota\in J} G_\iota\right) \times \left(\prod_{\iota\in J}\{e_\iota\}\right)$。因爲任意開集合的投影是一個開集合，所以 G 在 $\prod_{\iota\in J} G_\iota$ 上的投影 Pr_J 是同態。由此，商羣 G/G'_J 同構於 $G'_{J'}$，G 同構於積 $G'_J \times (G/G'_J)$。

定理 16. 設 G_1, G_2 爲兩個拓撲羣，H_1（相應 H_2）是 G_1 的正規子羣（相應 G_2），則拓撲羣$(G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$到拓撲羣$(G_1 \times G_2)/(H_1 \times \times H_2)$的典範映像是同構的。

事實上，這個映像是羣結構的同構和同胚。

註． 設G是一個加法交換羣，把 $G \times G$ 映到G的映像$(x, y) \to \to x + y$ 是一同態。事實上，就是 $G\times G$ 到G上的表現，由是$(x+x') + +(y + y') = (x + y) + (x' + y')$。它是連續的，而且 $G \times G$ 的原點鄰域 $V \times V$ 在這映像下是G的 $V + V$ 鄰域。

§ 2. 羣上的一致性結構

由 § 1 已看到，拓撲羣中各點的鄰域完全由主單位元的鄰域決定：如 $\mathfrak{V}$是 e 的完全鄰域組，那末$\{aV | V \in \mathfrak{V}\}$就是 a 的完全鄰域組。這很容易使我們想到是否可以引出一致性結構的問題。實際上，設 $V_d \equiv$

$\equiv\{(x,y)|x,y\in G,yx^{-1}\in V\},V\in\mathfrak{V}$,那末 $V_d\supset\Delta\equiv\{(x,x)|x\in G\}$,$\{V_d|V\in\mathfrak{V}\}$是滲透基．由於

$$yx^{-1}\in V\Longleftrightarrow xy^{-1}\in V^{-1},$$

可知 $\overset{-1}{V_d}=(V^{-1})_d$．因 $zx^{-1}\in V,\ yz^{-1}\in V\Longrightarrow yx^{-1}\in V\cdot V$,可知 $V_d\circ\circ V_d\subset(\overset{2}{V})_d$．於是$\{V_d|V\in\mathfrak{V}\}$決定$G$上一個一致性結構,表示成 $\mathfrak{S}_d$．這一致性結構與G上的拓撲結構相符合,因為 $V_d(x)=\{y|yx^{-1}\in V\}==V_x$．同理考慮

$$V_s\equiv\{(x,\ y)|x,\ y\in G,\ x^{-1}y\in V\},$$

則$\{V_s|V\in\mathfrak{V}\}$決定G上一個與它的拓撲結構相符合的一致性結構，表示成 $\mathfrak{S}_s$.

定義 1. 上面定義的一致性結構 $\mathfrak{S}_d$, $\mathfrak{S}_s$ 各叫做羣G上的右、左一致性結構.

例．1) 在實數加羣R上，上面的一致性結構即平常的一致性結構：$V_\delta=\{(x,y)||x-y|<\delta,\ x,y\in R\}$.

2) 設 $\mathfrak{M}_2'$ 表示實二行非降秩方陣$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$所組成的乘羣．令

$$V_n=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\middle||\alpha-1|\leqslant\frac{1}{n},\ |\beta|\leqslant\frac{1}{n},\ |\gamma|\leqslant\frac{1}{n},\ |\delta-1|\leqslant\frac{1}{n}\right\}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots).$$

對於兩方陣 $a=(\alpha_{ij})$與 $b=(\beta_{ij})$,定義

$$\rho(a,\ b)\equiv\max_{1\leqslant i,j\leqslant 2}|\alpha_{ij}-\beta_{ij}|,$$

那末不難驗明 ρ 是距離,從而它在 $\mathfrak{M}_2'$ 上誘導出一個拓撲結構來．由於在這拓撲空間中,$a_n\to a$ 意味着方陣 a_n 的每個元素在實數直綫R上收斂於 a 的相應元素,可以證明 $\mathfrak{M}_2'$是拓撲乘羣．相應的一致性結構乃是由距離 ρ 引起的.

注意,在交換羣中,左右兩一致性結構自然相同,但一般左、右兩個一致性結構不相同.

定理 1. 為了拓撲羣G的左、右兩個一致性結構相同,必須且只須 e 有一基本鄰域組由不變集(即在內自同構下不變：$xAx^{-1}=A$ (對一

切 $x\in G$ 成立))組成.

證. 如果 $\mathfrak{B}\equiv\{V|V\in\mathfrak{B}\}$ 是 e 的一個基本鄰域組,並且每個 $V\in\mathfrak{B}$ 是不變集,那末對每個 $x\in G$, $xV=Vx$, 從而

$$yx^{-1}\in V\Longleftrightarrow y\in Vx\Longleftrightarrow y\in xV\Longleftrightarrow x^{-1}y\in V,$$

即左右兩一致性結構相同: $\mathfrak{G}_d=\mathfrak{G}_s$.

反之,設左右兩一致性結構相同,那末對於 e 的每個鄰域 V, 必存在鄰域 V_1, 使對於每個 $x\in G$,

$$xV'\subset Vx. \ (x^{-1}y\in V'\Longrightarrow yx^{-1}\in V, \text{即} xV'\subset Vx).$$

x 既是任意的,可知

$$V'\subset\bigcap_{x\in G}x^{-1}Vx.$$

令 $\tilde{V}$ 表示集 $\bigcap_{x\in G}x^{-1}Vx$ 的內部,那末,至少 $e\in\tilde{V}$(因爲 $e\in V'$),從而 $\tilde{V}$ 是不空開集,並且 $\tilde{V}\in\mathfrak{B}$. 因 $a^{-1}\tilde{V}a$ 是開集,並且

$$a^{-1}\tilde{V}a\subset\bigcap_{x\in G}a^{-1}x^{-1}Vxa=\bigcap_{x\in G}x^{-1}Vx,$$

從而 $a^{-1}\tilde{V}a\subset\tilde{V}$, 而且這對於每個 $a\in G$ 成立,於是

$$\tilde{V}=a^{-1}\tilde{V}a,$$

即 $\tilde{V}$ 是不變集. 注意 $\tilde{V}\subset V$, 而 V 是任意的, 從而 e 有一由不變集組成的基本鄰域組.

例. 考前面引入的拓撲羣 $\mathfrak{M}_2'$. 它的左右兩一致性結構不同. 爲了證明這一點,只須證定理 1 的條件不滿足. 事實上,令 V_n 的意義如前,那末

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{n} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & 0\\ \frac{1}{n} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\notin V_{\frac{1}{2}},$$

但 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{n} & 1\end{pmatrix}\in V_{\frac{1}{n}}$, 對一切 n 成立(這個例是由角谷靜夫舉出的).

註. 由一般關於一致性空間的結果,可知對於緊拓撲羣 G,左右兩

一致性結構是相同的(因爲緊空間上的一致性結構是一意的). 注意上面的例中的羣 $\mathfrak{M}_2'$ 是局部緊,但非緊的。

例. 緊羣的例:複數平面上單位圓周按運算

$$e^{i\vartheta}\cdot e^{i\varphi}=e^{i(\vartheta+\varphi)}\ (0\leqslant\vartheta,\ \varphi<2\pi)$$

以及作爲複數平面的子空間形成拓撲羣,這個羣(作爲複平面上的有界閉集)熟知是緊的。

既然拓撲羣一定可以一致化,從而當它是 (T_1) 型時,它的拓撲結構一定是全正則的,特別也是正則的. 這加强了§1定理3的結果.

拓撲羣既可以一致化,它的一致性結構可以由一族擬距離 $\{\rho_\iota(x, y)\}_{\iota\in J}$ 決定. 現在興趣在於這種擬距離具有與羣性質相關的有趣屬性. 現在考察左一致性結構 $\mathfrak{G}_s$. 按照第五章的證明,這個一致性結構可以由一個擬距離族 $\{\rho_\iota(x, y)\}_{\iota\in J}$ 決定,而依照那裏的證明,對於可數多個鄰域 (V_n), 如令

$$U_1\subset V_1,\ \overset{3}{U}_{n+1}\equiv U_{n+1}\circ U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n\cap\left(\bigcap_{p=1}^{n}V_p\right)\ (n\geqslant 1),$$

$$g(x, y)=\begin{cases}0 & \text{如}(x, y)\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}U_n,\\ 2^{-k} & \text{如}(x, y)\in U_n(1\leqslant n\leqslant k)\text{但}(x, y)\notin U_{k+1},\\ 1 & \text{如}(x, y)\notin U_1,\end{cases}$$

$$\rho(x, y)=\inf_{\substack{z_0=x\\ z_p=y}}\sum_{i=0}^{p-1}g(z_i, z_{i+1}),$$

可以看出,由於 $(x, y)\in V_s\Longleftrightarrow x^{-1}y\in V\Longleftrightarrow(e, x^{-1}y)\in V_s$,

$$\rho(x, y)=\rho(e, x^{-1}y).$$

令 $N(x)=\rho(e, x)$, 那末 $N(x)$ 具有下列屬性:

1° $N(e)=0$;

2° $N(x^{-1}y)\leqslant N(x)+N(y)$.

現在來證明 2°. $N(x^{-1}y)=\varphi(e, x^{-1}y)=\rho(x, y)\leqslant\rho(x, e)+\rho(e, y)=$ $=N(x)+N(y)$. 由此還可以推出

3° $N(x)\geqslant 0$ 且 $N(x)=N(x^{-1})(x\in G)$;

4° $N(xy) \leqslant N(x) + N(y)$;

5° $|N(x) - N(y)| \leqslant N(yx^{-1})$.

事實上,在 2° 中令 $x = y$, 得 $2N(x) \geqslant 0$; 在 2° 中令 $y = e$, 得

$$N(x^{-1}) \leqslant N(x) + N(e) = N(x).$$

但由於 $(x^{-1})^{-1} = x$, 也可得出 $N(x) \leqslant N(x^{-1})$, 從而 3° 得證.

由於 $N(x) < \varepsilon \Longleftrightarrow \rho(e, x) < \varepsilon$, ρ 是決定左一致性結構 $\mathfrak{G}_s$ 的擬距離組中的一個, 可知 $x \in V(e; \rho; \varepsilon) \Longrightarrow N(x) < \varepsilon$. 我們注意下列事實:

爲了拓撲羣 G 上滿足 1°, 2° 的實函數 $N(x)$ 是連續的,必須且只須對於任意 $\varepsilon > 0$, 存在 e 的一個鄰域 U, 使

$$x \in U \Longrightarrow N(x) < \varepsilon. \tag{1}$$

事實上,設 N 連續,那末特別它在 e 處連續,即對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 e 的鄰域 U, 使 $x \in U \Longrightarrow |N(x)| = |N(x) - N(e)| < \varepsilon$.

反之,設 $N(x)$ 滿足上述條件. 對於任意 $\varepsilon > 0$ 及任意 $z \in G$, 先取 $U \in \mathfrak{B}(e)$, 使 $x \in U \Longrightarrow N(x) < \varepsilon$. 依 5°,

$$|N(z) - N(xz)| \leqslant N(xzz^{-1}) = N(x) < \varepsilon,$$

即對於任意 $y \in Uz(\in \mathfrak{B}(z))$, $|N(z) - N(y)| < \varepsilon$, 證完了 $N(y)$ 的連續性.

由於 ρ_V 的作法,可知

$$\left\{x \,\middle|\, N(x) < \frac{1}{2^{k+1}}\right\} \subset U_K \subset \left\{x \,\middle|\, N(x) \leqslant \frac{1}{2^k}\right\}. \tag{2}$$

定義 2. 羣上滿足上述條件 1°, 2° 的實值函數 $N(x)$ 叫做羣上的(左)擬範數.

註. 如果 N 是羣 G 上的擬範數,而 α 是非負實數,那末 αN 也是 G 上的擬範數. 兩個擬範數 N_1, N_2 的和 $(N_1 + N_2)(x) \equiv N_1(x) + N_2(x)$ 仍是擬範數. 如果 $a \in G$, 那末 $N_a(x) \equiv N(a^{-1}xa)$ 也是 G 上擬範數, 因爲

$$N_a(x^{-1}y) = N(a^{-1}x^{-1}aa^{-1}ya) \leqslant N(a^{-1}xa) + N(a^{-1}ya) = \\ = N_a(x) + N_a(y).$$

如果N是連續的，那末aN，N_a也是連續的.

如果使用右一致性結構，那末，因$(x, y) \in V_d \Longleftrightarrow yx^{-1} \in V \Longleftrightarrow (e, yx^{-1}) \in V_d$，所以相應的擬距離滿足$\rho(x, y) = \rho(e, yx^{-1})$，而$N(x) \equiv \equiv \rho(e, x)$滿足

$1^{\circ\prime}$ $N(e) = 0$;

$2^{\circ\prime}$ $N(yx^{-1}) \leqslant N(x) + N(y)$.

這樣的實函數N叫做(右)擬範數.

由於"左，右"的理論是完全平行的，下面我們主要考慮右擬範數，並且一般不附加"右"這一形容詞.

定義 3. 羣G上的擬範數N叫做不變的，是指它滿足下列條件：對於任意$x, y \in G$，$N(x) = N(y^{-1}xy)$.

註. 在上述條件中用yx代替x，便得$N(yx) = N(xy)$. 反之，如果$N(yx) = N(xy)$對任意$x, y \in G$成立；令$y^{-1}x$代替x，得$N(x) = N(y^{-1}xy)$. 從而擬範數的不變性的條件也可以表達成：對任意$x, y \in G$，$N(yx) = N(xy)$. 交換羣上的一切擬範數必是不變的. 下面給出

定理 2. 爲了按上述方式由鄰域族(U_k)作出的擬範數N是不變的，只須對於每個k及任意$y \in G$，

$$y^{-1}U_k y = U_k.$$

證. 因爲定理中條件意味着$x^{-1}y \in U_k \Longleftrightarrow yx^{-1} \in U_k$，從而$\rho(e, x^{-1}y) = \rho(e, yx^{-1}) = \rho(x, y)$，這就是說，用$x^{-1}$代替$x$，得

$$N(xy) = \rho(e, xy) = \rho(e, yx) = N(yx).$$

證完.

上面考慮的乃是由羣的一致結構引出擬範數，今反之考慮用擬範數定義羣的一致性結構與拓撲結構的問題. 爲此引入 A. A. Марков 的複範數概念.

定義 4. 羣G上一族擬範數$\mathfrak{N} = \{N_\iota\}(\iota \in J)$叫做複範數，是指

$1^\circ N_1, N_2 \in \mathfrak{N} \Longrightarrow N_1 + N_2 \in \mathfrak{N}$，這裏$N_1 + N_2$表示由下式決定的擬範數：

$$(N_1 + N_2)(x) = N_1(x) + N_2(x);$$

$2°$ $N \in \mathfrak{N}, a \in G \Longrightarrow N_a \in \mathfrak{N}$, 這裏$N_a(x) \equiv N(a^{-1}xa)$;

$3°$ $x \in G, x \neq e \Longrightarrow \exists N \in \mathfrak{N}, N(x) \neq 0$.

拓撲羣G上的複範數$\mathfrak{N} = \{N_\iota\}$叫做連續的，是指每個$N_\iota(\iota \in J)$是連續擬範數.

註. 仿第五章論複距離的方式，把$\mathfrak{N}(x) \equiv \{N_\iota(x)\}_{\iota \in J}$看作冪空間$R^J$中的元，那末我們可以把複範數與由$G$到$R^J$中的映像$x \to \mathfrak{N}(x)$等同起來，而這樣的複範數滿足下列條件:

1) $\mathfrak{N}(x) \geqslant \Theta$($\Theta$表示$R^J$中的零元$(O_\iota)_{\iota \in J}$, $O_\iota \equiv O \in R$);
$\mathfrak{N}(x) = \Theta \Longleftrightarrow x = e$;

2) $\mathfrak{N}(yx^{-1}) \leqslant \mathfrak{N}(x) + \mathfrak{N}(y)$.

定義 5. 設$\mathfrak{N} = \{N_\iota | \iota \in J\}$是羣$G$上的複範數. 取諸集

$U_{N_\iota} \equiv U_\iota \equiv \{x | x \in G, N_\iota(x) < 1\} (\iota \in J)$

作主單位元e的基本鄰域組，那末在G上決定一個(T_2)型拓撲羣結構，使得$\mathfrak{N}$按這個拓撲羣結構是連續的. 這時我們說G的拓撲結構是由複範數$\mathfrak{N}$引起的.

註. 我們必須驗明$\{U_\iota | \iota \in J\}$確能決定$G$上一個拓撲羣結構，即要驗明§1中定理2的4個條件.

因$N_\iota(e) = 0$, 所以每個$U_\iota \ni e$, 並且依定義4的$3°$, $x \neq e \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists N_\iota \in \mathfrak{N}$, 使$N_\iota(x) \neq 0$, 從而必要時把$N_\iota$乘上一自然數$n$, 就可使$nN_\iota(x) \geqslant 1$, 這就意味着(依定義4的$1°$ $nN_\iota \in \mathfrak{N}$)$U_{nN_\iota} \equiv \{x | x \in G, nN_\iota(x) < 1\} \not\ni e$. 由此知

$$\bigcap_{\iota \in J} U_\iota = \{e\}.$$

由於

$$U_{N_\iota + N_\kappa} \subset U_{N_\iota} \cap U_{N_\kappa},$$

可知$\{U_{N_\iota} | \iota \in J\}$是滲透基. 由擬範數的性質$4°$可知

$$U_{2N} \cdot U_{2N} \subset U_N,$$

而由$3°$可知

$$U_N^{-1} = U_N,$$

§1 定理 2 的條件 1°, 2°, 3° 都成立. 由於

$$a^{-1}U_{N_a}a = U_N,$$

可知 4° 也成立. 於是諸 $U_{N_\iota}(\iota \in J)$確在G上決定一個拓撲羣結構, 使(U_{N_ι})是 e 的完全鄰域組. 因取自然數 n, 使 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 時可使

$$x \in U_{nN} \Longrightarrow N(x) < \varepsilon,$$

可知諸擬範數N都按這個拓撲結構連續.

由前述不難證明, 每個(T_2)型拓撲羣的拓撲結構必由一複範數決定.

定理 3. (T_2)型拓撲羣上的一切連續擬範數 $N_\iota(\iota \in J)$ 組成一個複範數 $\mathfrak{N}$, 使 $\mathfrak{N}$ 在G上引起的拓撲結構等於G上原來的拓撲結構.

證. $\{N_\iota | \iota \in J\}$構成一個擬範數組, 滿足定義 4 中條件 1°, 2°, 這已由定義 2 下註說明. 如果G是(T_2)型的, 對於每個 $x \neq e$, 必存在 e 的鄰域 V, 使 $x \notin V$; 從而依(2), 存在 $N \in \mathfrak{N}$, 使 $N(x) \nless 1$, 即 $N(x) > 0$. 這證明了 $\mathfrak{N}$ 是複範數. 因每個 $N \in \mathfrak{N}$ 是連續的, 可知

$$U_N \equiv \{x | N(x) < 1, x \in G\}$$

是G中含 e 的開集. 反之, 對於G中 e 的每個鄰域U, 由擬範數的作法(即使用(2))可知存在連續擬範數 $N \in \mathfrak{N}$ (取足够大的自然數 n, 使用 nN 代替(2)中的 N), 使$U_N \subset U$. 從而由$\{U_N | N \in \mathfrak{N}\}$ 決定的拓撲結構與G中原來的拓撲結構等價. 證完.

對於拓撲羣 G, 設 $\mathfrak{N} = (N_\iota)(\iota \in J)$是它的複範數. 仿效第四章的符號, 規定 Δ_0 表示 $\overline{R}^J$ 中那些元 $\delta = (z_\iota)(\iota \in J)$的全體, 其中 $z_\iota \geqslant 0$, 但只有一個 $z_\iota < +\infty$, 而這個 $z_\iota = 1$. 那末G中 e 的基本鄰域組由下列集給出:

$$\mathfrak{S}(\delta) \equiv \{x | \mathfrak{N}(x) \prec \delta\},$$

這裏 $\mathfrak{N}(x) \prec \delta$ 意味着對於每個 $\iota \in J, N_\iota(x) < z_\iota$. 由於$N$是連續擬範數 $\Longleftrightarrow \alpha N$ 也是連續擬範數$(\alpha > 0)$, 從而我們可以直接引用第五章的符號. 令Δ表示 $\overline{R}^J$ 中那些元 $\delta = (z_\iota)$的全體, 其中 $z_\iota \geqslant 0$, 但只有有窮多個 $z_\iota < +\infty$, 那末

$$\mathfrak{S}(\delta) \equiv \{x | \mathfrak{N}(x) \prec \delta\}$$

當 $\delta \in \Delta$ 時形成 G 中 e 的基本鄰域組．如果所考察的是右一致性結構，

$$\sigma(x, y) \equiv \mathfrak{N}(yx^{-1})$$

便是決定 G 的右一致性結構的複距離．因對於與右擬範數 $N_\iota(x)$ 相應的擬距離 $\rho_\iota(x, y)$ 滿足 $N_\iota(x) = \rho_\iota(e, x)$，$\rho_\iota(x, y) = \rho_\iota(e, yx^{-1})$，可知 $\sigma(x, y) = \{\rho_\iota(x, y)\}_{\iota \in J}$ 並且滿足下列右不變性：

$$\sigma(x, y) = \sigma(xa, ya) \quad (a \in G).$$

同理，拓撲羣 G 上的左一致性結構由一個左不變複距離 $\sigma(x, y)$ 決定：

$$\sigma(x, y) = \sigma(ax, ay) \quad (a \in G).$$

利用右不變複距離或右複範數，可以很方便地表達出由拓撲羣 G 到拓撲羣 G_1 中的映像是一致連續的條件．爲了由 G 到 G_1 中的映像 φ 是右一致連續，必須且只須對於每個 $\varepsilon \in \Delta_1$（這裏 $G = G(\mathfrak{N}, \Delta)$，$G_1 = G_1(\mathfrak{N}_1, \Delta_1)$），存在 $\delta \in \Delta$，使

$$\mathfrak{N}(x) \prec \delta \Longrightarrow \mathfrak{N}_1(\varphi(x)) \prec \varepsilon.$$

特別，不難驗證下列定理．

定理 4. 拓撲羣 G 中的左、右平移 $x \to xa$，$x \to ax (a \in G)$ 都是由 G 的右一致性結構到它自己之上的同構，而對稱映像 $x \to x^{-1}$ 是由 G 的右一致性結構到左一致性結構上的同構．

證．設 $\mathfrak{N}$ 是 G 上的右複範數：$G = G(\mathfrak{N}, \Delta)$，那末，因

$$\mathfrak{N}(x) = \mathfrak{N}(xa) \, (a \in G)$$

（即 $\sigma(xa, ya) = \mathfrak{N}((ya)(xa)^{-1}) = \mathfrak{N}(yx^{-1}) = \sigma(x, y)$），可知 $x \to xa$ 是右一致性結構的同構．又因

$$\mathfrak{N}(x) = \mathfrak{N}(xa) = \mathfrak{N}(a^{-1}axa),$$

從而

$$N(x) < \varepsilon \Longrightarrow N_a(ax) < \varepsilon \ (\varepsilon > 0, \varepsilon \in R),$$

不難看出（引用定義 4 的條件 2°）$x \to ax$ 也是右一致性結構的同構．

設 $\mathfrak{N}_l$ 是 G 上的左複範數．對於 $N_l \in \mathfrak{N}_l$，令 $N(x) = N_l(x^{-1})$，那末不難看出 $N(e) = 0$ 並且

$$N(x^{-1}y) = N_l((x^{-1}y)^{-1}) = N_l((y^{-1})(x^{-1})^{-1}) \leqslant \leqslant N_l(x^{-1}) + N_l(y^{-1}) = N(x) + N(y),$$

即N是右擬範數. 從而

$$N(x) < \varepsilon \Longrightarrow N_l(x^{-1}) < \varepsilon,$$

由此不難推出 $x \to x^{-1}$ 是由右一致性結構到左一致性結構上的同構.

系. 爲了拓撲羣的左一致性結構是備的，必須且只須它的右一致性結構是備的.

定理 4′. 由拓撲羣G到拓撲羣 G_1 中的每個連續表現必是由 G_d 到 G_{1d} (或由 G_s 到 G_{1s})中的一致連續映像.

證. 設 V_1 是 G_1 中主單位元 e_1 的鄰域, 令 $V = \overset{-1}{f}(V_1)$, 那末 $yx^{-1} \in \in V \Longrightarrow f(y)f(x)^{-1} = f(yx^{-1}) \in V_1$. 證完.

定義 6. 拓撲羣叫做備的, 是指它的左或右一致性結構是備的.

由一致性空間的一般結果可知, 緊羣必是備的. 對於拓撲羣, 還可以證明更一般的結果.

定理 5. 局部緊(T_2)型羣必是備的.

證. 設(x_δ)是羣中的基本列($\delta \in \Delta$), 設U是 e 的任意鄰域. 取 e 的緊鄰域 V, 使 $VV^{-1} \subset U$. 由於緊(T_2)型空間必是正則的, 這是可能的. 旣然(x_δ)是基本列, 今考右一致性結構, 於是存在 δ_0, 使

$$\delta \succ \delta_0 \Longrightarrow x_\delta x_{\delta_0}^{-1} \in V \text{ 或 } x_\delta \in Vx_{\delta_0}.$$

但 Vx_{δ_0} 也是緊集, 從而定向列$(x_\delta)_{\delta \succ \delta_0}$必有一子定向列收斂於 Vx_{δ_0} 中一點 x_0, 這就是說, $x_0 \in Vx_{\delta_0}$. 於是 $x_0^{-1} \in x_{\delta_0}^{-1}V^{-1}$ 或 $x_{\delta_0} \in V^{-1}x_0$. 由此

$$\delta \succ \delta_0 \Longrightarrow x_\delta \in Vx_{\delta_0} \subset VV^{-1}x_0 \subset Ux_0.$$

U旣是 e 的任意鄰域, 可知$(x_\delta) \to x_0$. 證完.

系. (T_2)型拓撲羣G中的每個局部緊子羣必在G中是閉的.

證. (T_2)型一致性空間中閉子空間必是閉的, 這在第五章已證明了.

下面考察羣的完備化問題. 設G是非完備的(T_2)型拓撲羣, 右一致性空間 G_d 可以完備化, 即 G_d 成爲一完備空間 $\hat{G}_d$ 的稠子集. 問題在於 $\hat{G}_d$ 是否能看成是拓撲羣? 首先, 我們試圖把映像$(x, y) \to xy$ 及 $x \to x^{-1}$ 按連續性延拓到 $\hat{G}_d \times \hat{G}_d$ 與 $\hat{G}_d$ 之上, 並考察這樣延拓出來的映像是否使 $\hat{G}_d$ 成爲羣? 如果能成羣, 由於 xy 與 x^{-1} 是按連續性延

拓的，$\hat{G}_d$ 自然是拓撲羣．但 $\hat{G}_d$ 是否是備的？最後，如果拓撲羣 G 可以按右一致性結構完備化，這完備化是否除同構外一意？

首先注意 $(x, y) \to xy$ 與 $x \to x^{-1}$ 一般不必是一致連續的，從而是否能按連續性延拓到 $\hat{G}_d$ 上去，有待證明．

例．考察以前討論過的拓撲羣 $\mathfrak{M}_2'$．爲了 $x \to x^{-1}$ 是一致連續，必須對每個自然數 n，存在自然數 k，使

$$xy^{-1} \in V_k \Longrightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} = x^{-1}y \in V_n,$$

這裏 V_n 的意義已見定義 1 下例 2．用 yx 代替 y，必須使

$$y^{-1} \in V_k \Longrightarrow x^{-1}yx \in V_n \ (\text{一切 } x);$$

但這不可能，因爲

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{k} & 0 \end{pmatrix} \in V_k, \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in V_n$$

對足够小的 n 不成立，無論如何選擇 k．又如果 $(x, y) \to xy$ 是由 $G_d \times \times G_d$ 到 G_d 中的一致連續映像，必須對每個自然數 n，必能找到一個自然數 k，使

$$xy^{-1} \in V_k,\ uv^{-1} \in V_k \Longrightarrow xu(yv)^{-1} \in V_n.$$

但特別取 $x = y$，$uv^{-1} = z$，這意味着

$$z \in V_k \Longrightarrow xzx^{-1} \in V_n,$$

但依上述這是不可能的．因此 $(x, y) \to xy$ 與 $x \to x^{-1}$ 都不是一致連續！

但爲了能按連續性延拓 xy 與 x^{-1}，我們可以依據其它命題．

定理 6． 設 G 是拓撲羣，(x_α)，(y_β) 是 G_d 的兩個基本列，那末 $(x_\alpha y_\beta)_{(\alpha\times\beta)}$ 是 G_d 中的基本列．

證．我們要證明對於 e 的任意鄰域 V，存在 α_0，β_0，使

$$\begin{aligned} \alpha \succ \alpha_0,\ \beta \succ \beta_0 &\Longrightarrow (x_{\alpha'}y_{\beta'})(x_\alpha y_\beta)^{-1} \in V. \\ \alpha' \succ \alpha_0,\ \beta' \succ \beta_0 & \end{aligned} \tag{3}$$

但

$$x_{\alpha'}y_{\beta'} \cdot (x_\alpha y_\beta)^{-1} = (x_{\alpha'} \cdot a^{-1})(ay_{\beta'}y_\beta^{-1}a^{-1})(ax_\alpha^{-1}).$$

先取 e 的鄰域 U，使 $UUU = U^3 \subset V$. 取 α_0，使

$$\alpha, \alpha' \succ \alpha_0 \Longrightarrow x_{\alpha'} x_{\alpha}^{-1} \in U.$$

特別令 $a \equiv x_{\alpha_0}$，得

$$x_{\alpha'} a^{-1} \in U, \ a x_{\alpha}^{-1} \in U.$$

再取 β_0，使

$$\beta, \beta' \succ \beta_0 \Longrightarrow y_{\beta'} y_{\beta}^{-1} \in a^{-1} U a (\in \mathfrak{V}).$$

於是(3)得證.

由定理 6 不難證明 $(x, y) \to xy$ 可以延拓成由 $\hat{G}_d \times \hat{G}_d$ 到 $\hat{G}_d$ 中的連續映像. 事實上，$G \times G$ 是 $\hat{G}_d \times \hat{G}_d$ 中的稠集，$(x, y) \to xy$ 是由 $G \times G$ 到備(T_2)型一致性空間 $\hat{G}_d$ 中的連續映像. 由定理 6，$(x, y) \to$ $\to xy$ 把 $G \times G$ 中的每個基本列映成 $\hat{G}_d$ 中的基本列，從而依第二章§4的定理，$(x, y) \to xy$ 可以按連續性延拓成由 $\hat{G}_d \times \hat{G}_d$ 到 $\hat{G}_d$ 中的連續映像. 依同一定理，爲了 $x \to x^{-1}$ 可以按連續性延拓到全 $\hat{G}_d$ 上去，必須且只須它把 G_d 中的每個基本列映成 G_d 中的基本列. 這一條件一般不是對每個拓撲羣成立，但在下面的考察中，設這條件滿足.

定理 7. 爲了(T_2)型拓撲羣同構於一完備羣 $\hat{G}$ 的一個稠子羣，必須且只須由 $x \to x^{-1}$ 把 G 中按右一致性結構的每個基本列映成按右一致結構的基本列. 完備羣 $\hat{G}$ 除同構外一意決定.

證. 前面已經證明，定理中條件乃是$(x, y) \to xy$ 與 $x \to x^{-1}$ 可以按連續性延拓到 $\hat{G}_d$ 上的必要充分條件. 現在要證明在這條件下，xy 與 x^{-1} 延拓之後在 $\hat{G}_d$ 上決定一個羣結構，以及 $\hat{G}_d$ 成爲完備拓撲羣. 最後證明 $\hat{G}$ 除同構外一意決定.

1) 如果 f 與 g 是由拓撲空間 E 到(T_2)型空間 E_0 中的兩個連續映像，而對於 E 中一個稠集 A 的每點 x，$f(x) = g(x)$，那末 $f = g$（見第二章，定理）. $x(yz)$與$(xy)z$ 看作定義在 $\hat{G}_d \times \hat{G}_d \times \hat{G}_d$ 上的映像，在稠集 $G_d \times G_d \times G_d$ 上相等，於是根據上述結果，$x(yz) = (xy)z$ 在 $\hat{G}_d$ 上成立，這說明$(x, y) \to xy$ 在 $\hat{G}_d$ 上滿足結合律. 同理，可驗明 $\hat{G}_d$ 的其它羣屬性.

2) $\hat{G}_d$ 是完備拓撲羣. 它是拓撲羣，已由$(x, y) \to xy$ 與 $x \to x^{-1}$

的按連續性延拓直接看出了. 設 $\mathfrak{U}_d$ 是拓撲羣 $\hat{G}_d$ 自己的右一致性結構，而 $\mathfrak{U}$ 表示把 G 的右一致性結構完備化而得出的 G_d 的一致性結構. 於是 G 中按照 $\mathfrak{U}_d$ 的每個基本列也是 $\mathfrak{U}$ 的基本列. 但這一基本列在 $\hat{G}_d$ 中收斂，因爲 $\mathfrak{U}$ 是完備的. 既然 $\mathfrak{U}$、$\mathfrak{U}_d$ 在 $\hat{G}_d$ 上決定同一拓撲結構，依第五章定理 $\mathfrak{U}_d$ 是完備的. 由此，依第五章定理，$\mathfrak{U}$ 與 $\mathfrak{U}_d$ 是相同的.

3) 爲了證明完備化的一意性，我們證明下列命題：設 G_1, G_2 是兩個完備(T_2)型拓撲羣，H_1, H_2 各是G_1、G_2 的稠子羣. 每個由 H_1 到 H_2 上的同構可以一意地延拓成由 G_1 到 G_2 上的同構.

事實上，如果 f 是由 H_1 到 H_2 上的同構，f 是 H_1 的右一致性結構到 H_2 的右一致性結構上的同構，則依定理 4′ f 可以一意地延拓成由 G_1 的右一致性結構到 G_2 上的右一致結構上的同構. 依照本證明 1) 中所敘述的原理，$\bar{f}$ 是由 G_1 到 G_2 上的表現. 證完.

註. 對於交換羣，左，右一致性結構是相同的，從而我們不必使用左，右的形容詞. 由於定理 4，定理 7 中的條件一定滿足. 由此不難推出下列定理.

定理 8. 設 G 是交換拓撲羣. $x\to x^{-1}$ 與 $(x, y)\to xy$ 各是由 G 到 G 與由 $G\times G$ 到 G 中的一致連續映像. 如果 G 是(T_2)型的，它必同構於一個交換完備羣 $\hat{G}$ 的稠子羣，而且 $\hat{G}$ 除同構外由 G 一意決定.

證. 由定理 4，$x\to x^{-1}$ 是一致連續，而因對交換羣，$(x, y)\to xy$ 是由羣 $G\times G$ 到 G 中的連續表現，可知（依定理 4′）這也是一致連續的. 當 G 是(T_2)型時，依上面的註，定理 7 的條件滿足，從而 G 同構於一個完備羣 $\hat{G}$ 的稠子羣，而 $\hat{G}$ 除同構外一意決定. 因 $xy=yx$ 在 G 上成立，由定理 7 中的證明 1) 的原理，這在 $\hat{G}$ 上也成立. 證完.

§3. 距離羣

既然拓撲羣有它的自然的(左，右)一致性結構，而一致性空間距離化的問題既已解決，拓撲羣的距離化問題也不難考慮.

定理 1. 爲了拓撲羣 G 的左，右一致性結構是可距離化的，必須且只須 G 是(T_2)型的，並且 G 中主單位元 e 具有可數的基本鄰域組.

證．必要性不待證，今證充分性．設定理中條件滿足，設 (V_n) 是 e 的基本鄰域組．令 $V_n^s \equiv \{(x, y) | x^{-1}y \in V_n\}$，$(V_n^s)$就是$G$的左一致性結構的鄰滲透的基，既然這基是可數的，$G_s$ 是可距離化的．右一致性結構的處理也是一樣的．

定義 1. 拓撲羣叫做可距離化的，是指它的左，右一致性結構是可距離化的．

由 §2 中開始部分的考慮直接得出下列結果．

定義 2. 羣G上的擬距離ρ叫做左(右)不變的，是指

$$\rho(x, y) = \rho(zx, zy) \ (z \in G)$$

或

$$\rho(x, y) = \rho(xz, yz) \ (z \in G).$$

既左不變又右不變的擬距離叫做不變擬距離．

定理 2. 可距離化的拓撲羣G的左(右)一致性結構可以由一左(右)不變距離決定．

證．令$N(x) = \rho(e, x)$，可知(§2 定理 3)：

系. 可距離化的拓撲羣 G 的拓撲結構可以由一個範數(即滿足 $N(x) = 0 \Longrightarrow x = e$ 的擬範數)決定．

定理 3. 爲了滿足第一可數性公理的拓撲羣可以用一個不變距離$\rho(x, y)$距離化，必須且只須它有一個由不變集組成的基本鄰域組．

證．設 $\rho(x, y)$是不變距離，並且ρ決定羣G上的一致性結構，那末

$$U_n \equiv S\left(e; \frac{1}{n}\right) \equiv \left\{x \mid x \in G, \ \rho(x, e) < \frac{1}{n}\right\}$$

組成基本鄰域組，並且每個U_n是不變的，因爲

$$x \in U_n \Longrightarrow \rho(x, e) < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \rho(yxy^{-1}, e) = \rho(x, e) < \frac{1}{n} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow yxy^{-1} \in U_n,$$

即yU_ny^{-1}對任意$y \leftarrow G$成立．

反之，設 G 具有由不變集組成的可數基本鄰域組，那末在§2開始處的作法中，如取V是不變的，必然

$$x^{-1}y \in V \Longleftrightarrow (xz)^{-1}yz = z^{-1}(x^{-1}y)z \in z^{-1}Vz = V,$$

所以 $\rho(x, y)=\rho(xz, yz)$. 但這裏考察的既然是左一致性結構，$\rho(x, y)=\rho(e, x^{-1}y)=\rho(e, (zx)^{-1}zy)=\rho(zx, zy)$, 所以 ρ 是不變的.

例. 前面舉的拓撲羣 $\mathfrak{M}_2'$ 不能用不變距離 ρ 來距離化，因爲如果能用不變距離 ρ 來距離化，則

$$\rho(x^{-1}y, e)=\rho(y, x)=\rho(yx^{-1}, e),$$

從而左，右兩一致性結構相同，但 $\mathfrak{M}_2'$ 上的兩個一致性結構並不相同.

註. 與不變距離 ρ 相應的範數 N 也是不變的，因爲

$$N(y^{-1}xy)=\rho(e, y^{-1}xy)=\rho(e, x)=N(x).$$

定理 4. 拓撲羣 E 中凡第二綱且滿足廣義 Baire 性質的子羣必是 E 中既開且閉的集.

證. 依上一章的定理，H 在開集 $\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}=K$ 的每點處是第二綱的，從而 $H\cap K\neq\phi$ (因爲否則對每一點 $x\in K$, x 的鄰域 K 與 H 之交爲 ϕ, 從而是第一綱的). 依描述集合論概要(第六章)的定理，有

$$\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}=\overset{\circ}{\widehat{D(-H)}}=-\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}=-\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}, \text{ 而對於凡 } x\in H,$$

$$\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}=\overset{\circ}{\widehat{D(H+x)}}=\overset{\circ}{\widehat{D(H)+x}}=\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}+x,$$

所以 $\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}=K$ 在映像 $x\to -x$, $y\to y+x\,(x\in H)$ 之下不變，從而 $\overline{\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}}=D(H)$ 也不變. 因而如 H 有一點屬於 $\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}$, 則 H 之一切點皆然，即(依描述集合論概要定理 8 的 3) 之證明).

$$H\subset\overset{c}{\widehat{D(H)}}\subset D(H)\subset\overline{H}.$$

如 $p\in\overline{H}$, 則 p 的任意鄰域交 H. 特別，$K+p$ 是 p 之鄰域，所以 $\exists g\in H\cap(K+p)$, 使 $g-p\in\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}$; 依 $\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}$ 在 $x\to -x$ 之下的不變性可知 $p-g\in\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}$, 依 $\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}$ 在 $y\to y+g\,(g\in H)$ 之下的不變性可知，$p\in\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}$, 即 $\overline{H}\subset\overset{\circ}{\widehat{D(H)}}$. 從而結合上式可得

$$\overline{H}=\overset{c}{\widehat{D(H)}}=D(H).$$

依此，$\overline{H}$ 是即開且閉的集.

H 既是具有廣義 Baire 性質的，依描述集合論概要定理(第六章)可知在任何開集中必有一點，使在這點處 H 或 CH 是第一綱的. 但

$H\subset D(H)$而後者是開集，所以 $D(H)$ 中必有一點，使在這點處 CH 是第一綱的．如果 $\overline{H}\neq H$，取 $p\in\overline{H}\setminus H$，作傍系 $H+p$，則 $H+p\subset$ $\subset CH$．依上面的定理，$H+p$ 是第二綱的，且具有廣義 Baire 性質的，且既然H在 $\overline{H}(=D(H))$的每點處是第二綱的．$H+p$ 在 $\overline{H+p}=$ $=\overline{H}+p$ 的每點處是第二綱的。但 $\overline{H}$ 是子羣，所以 $\overline{H}+p=\overline{H}$，從而 $H+p$ 包含它的集 CH；它在 $\overline{H}=D(H)$ 的每點處是第二綱的，所以得出矛盾．因此 $\overline{H}=H$，即H是旣開且閉的。

系．聯通拓撲羣的任意滿足廣義 Baire 性質的眞部分羣(即不等於自己)必是第一綱的。

註．特別是聯通拓撲羣的閉子羣如不與整個羣重合，必是第一綱的。

定理 5. 如由完備距離羣E到距離羣 E' 上的代數同態 f 是具有廣義 Baire 性質的映像，則 f 是同態。

證．依描述集合論概要定義 6，存在集合 $H\subset E$，使$E\setminus H$是第一綱集，而 f 限制在H上是連續的． 考 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\Theta$ (Θ 表羣E的主單位元)．因爲$E\setminus(H+x_n)=(E\setminus H)+x_n$ 是第一綱的，而完備距離空間是第二綱的(見第六章定理)，又因爲可數多個第一綱集的結仍是第一綱集，所以

$$E\supsetneqq(E\setminus H)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}[(E\setminus H)+x_n]=(E\setminus H)\cup$$
$$\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}[E\setminus(H+x_n)]=E\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty}[(H+x_n)\cap H].$$

因而 $\exists x_0\in(H+x_n)\cap H$ 對一切 n 成立，即 $x_0\in H$ 且 $x_0-x_n\in H$ 對凡 n 成立．f 旣然在H上連續，而 $\lim(x_0-x_n)=x_0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}f(x_0-x_n)=f(x_0).$$

由於 f 是準同態，所以 $f(x_0-x_n)=f(x_0)-f(x_n)$，

$$\lim f(x_n)=\Theta,$$

即由 $x_n\to\Theta$ 得出 $f(x_n)\to\Theta$．從而 f 在E中的Θ處連續，由是 f 是連續準同態．

註．注意,最初雖知 f 在 H 上連續,也只知由 $x_n \in H(!)$, $x_n \to x \in$ $\in H \Longrightarrow f(x_n) \to f(x)$, 從而最後結論 $x_n \to \Theta \Longrightarrow f(x_n) \to \Theta(x_n \in$ $\in E!)$並非不足道的.

系． 由完備距離羣 E 到距離羣 E' 上的任意解析地可表現代數同態 f 必是同態.

證．依第六章定理凡解析地可表現映像必是具有狹義 Baire 性質的,從而更是具有廣義 Baire 性質的.

定理 6. 設 E 是聯通的距離羣,而 $\{f_n(x)\}$ 是一列由 E 到距離羣 E' 的同態,於是 $A = \{x | x \in E, \lim_{n\to\infty} f_n(x)$存在$\}$ 或是第一綱集, 或者等於 E_0.

證．首先證 A 是 E 中部分羣. 事實上,如 $\lim f_n(x)$ 及 $\lim f_n(y)$ 存在,則 $\lim f_n(x-y) = \lim[f_n(x)-f_n(y)] = \lim f_n(x)-\lim f_n(y)$ 存在.

依第六章定理, A 是 Borel 集,所以 A 是具有廣義 Baire 性質的. 由上面定理,證明完結.

定理 7. 設 E 是聯通完備距離羣,而 $\{f_{p,q}(x)\}$ 是由 E 到距離羣 E' 的一雙重列同態;設對於點列 $\{x_p\}(x_p \in E)$, $\lim_{q\to\infty} f_{p,q}(x_p)$ 對任意 $p=1, 2, \cdots$ 不存在,則

$H = \{x | \lim_{q\to\infty} f_{p,q}(x)$不存在(對一切 p)$\}$ 是第二綱集,而 $E \setminus H$ 是第一綱集.

證．設對於凡 $p = 1, 2, \cdots$, $H_p = \{x | \lim_{q\to\infty} f_{p,q}(x)$ 存在$\}$, 則因 $x_p \in E \setminus H_p$ 所以 $H_p \neq E$. 依前一定理, H_p 是第一綱的,所以 $\bigcup_{p=1}^{\infty} H_p$ 是第一綱集. 因爲 E 是完備的,依第六章定理,知 $E \setminus \bigcup_{p=1}^{\infty} H_p = H$ 是第二綱的.

定理 8. 設 G 是第二綱的拓撲羣, X 是 G 的子羣, 那末 $G \setminus X$ 或是空集,或是在 G 中第二綱的.

證．設 $G \setminus X \neq \phi$, 取 $y \in G \setminus X$, 那末 $yX \subset G \setminus X$, 因爲

$yx \in X \Longrightarrow y \in Xx^{-1} = X$ (如果 $x \in X$, 因 X 是子羣). 如果 $G \setminus X$ 是第一綱集, yX 也是第一綱集, 而因 $x \to yx$ 是同胚, X 也是第一綱集. 於是 $G = (G \setminus X) \cup X$ 也成爲第一綱的了. 與假設矛盾.

定理 9. 設 G 與 X 的意義如定理 $8'$, 而設 X 是 G 中稠 G_δ 集, 那末必然 $X = G$.

證. 這時 $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$, X_i 是稠開集. 於是 $G \setminus X_i$ 是閉集, 並且是疏集, 因爲旣然 X_i 是稠開集, 對於每個開集 O, $O \cap X_i$ 是不空開集, 而 $(O \cap X_i) \cap (G \setminus X_i) = \phi$. 於是

$$G \setminus X = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G \setminus X_i)$$

成爲第一綱集了! 矛盾.

定理 10 (Sierpinski)[1]. 如果 E 是備距離空間, 而 E 又是距離空間 M (其中的距離不必等於 E 中的距離) 的拓撲子空間, 那末 E 是 M 中一個 G_δ 集.

證. 設 ρ 是 M 中的距離, 那末 E 上的距離 ρ_0 與 ρ 在 E 上引出同樣的拓撲結構, 而 E 按 ρ_0 是備的. 於是對於每個點 $x \in E$ 及每個自然數 n, 必存在數 $\varepsilon_n(x) < \frac{1}{n}$, $\varepsilon_n(x) > 0$, 使

$$y \in E,\ \rho(y, x) < \varepsilon_n(x) \Longrightarrow \rho_0(y, x) < \frac{1}{n}.$$

令

$$U_n(x) \equiv \{y \mid y \in M,\ \rho(y, x) < \varepsilon_n(x)\};$$

令

$$G_n = \bigcup_{x \in E} U_n(x).$$

於是 G_n 是 M 中開集, 而 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ 是 M 中的 G_δ 集.

$x \in E \Longrightarrow x \in U_n(x)$ (一切 n), 從而 $x \in G$. 於是 $E \subset G$. 今證 $G \subset E$,

1) Sur les ensembles complets d'un espace ($\mathscr{D}$), Fund. Math., 11 (1928), 203—5.

從而便可得知E是M中G_δ集。實際上，設$x_0\in G$，令n爲固定自然數。依G的定義，$x_0\in G_n$，所以存在$x_n\in E$，使$x_0\in U_n(x_n)$。於是

$$\rho(x_0, x_n) < \epsilon_n(x_n).$$

既然已取$\epsilon_n(x) < \frac{1}{n}$，所以

$$\rho(x_0, x_n) < \frac{1}{n},$$

這就是說，$x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$。今取$\epsilon > 0$，取自然數$n$，使$\frac{2}{n} < \epsilon$。於是存在自然數$m$，使

$$\frac{1}{m} < \epsilon_n(x_n) - \rho(x_0, x_n).$$

對於自然數k，

$$\rho(x_k, x_n) \leqslant \rho(x_k, x_0) + \rho(x_0, x_n) < \frac{1}{k} + \rho(x_0, x_n),$$

所以

$$\rho(x_k, x_n) < \epsilon_n(x_n) \quad (k > m).$$

依$\epsilon_n(x)$的定義，$\rho_0(x_k, x_n) < \frac{1}{n}(k > m)$。於是

$$k, l > m \Longrightarrow \rho_0(x_k, x_l) \leqslant \rho_0(x_k, x_n) + \rho(x_n, x_l) <$$
$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n}.$$

這正是說，

$$k, l > m \Longrightarrow \rho_0(x_k, x_l) < \epsilon.$$

E既然按ρ_0是備的，x_n在E中收斂於一元z。但既然已知按ρ，$x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，所以$x_0\in E$，這極限$z$即是$x_0$。於是得證$G\subset E$。

定理 11. 設G是完備距離羣，那末它必可以改賦一個不變距離，使G按這個不變距離也是完備的。

證．可以把G改賦一個不變距離，設ρ是G上原來的距離，ρ_0是它上面的一個拓撲等價的不變距離；設G^*表示G按ρ_0的完備化，於是G賦以距離ρ（表示成(G, ρ)）是(G^*, ρ_0)的拓撲子空間，而(G, ρ)既是

備的，(G,ρ)在(G^*,ρ_0)中必是G_δ集．又(G,ρ_0)在(G^*,ρ_0)中稠，於是依定理2′，$G=G^*$，即G按ρ_0也是備的．證完．

註．關於以上結果，請參看

V. L. Klee, Jr., Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach), Proc. Amer. Math. Soc., 3(1952), 484—487.

參考文獻

角谷靜夫，Über die Metrisation der topologischen Gruppen, Proc. Imp. Acad. Tokyo, 12(1936).

G. Birkhoff, A note on topological groups, Comp. Math., 3(1936).

近藤基吉，A problem of the metrisation in Hausdorff's topological spaces, Tohôku Math. J., 37(1933).

角谷靜夫，Über ein Metrisationsproblem, Proc. Phys. Math. Soc. Jap., 20(1938).

第八章　拓撲綫性空間理論大意

§1.　拓撲綫性空間與偽範數族

本章所論的綫性空間，如不附加說明，常指實數域或複數域上的綫性空間[1]，各簡稱作實綫性空間與複綫性空間．有些定理的陳述與證明既適用於實數域，也適用於複數域；這時，用 K 表示這個數域，而稱有關的空間為數域 K 上的綫性空間，或簡稱 K-綫性空間．

定義 1． 數域 K 上的綫性空間 E 叫做拓撲綫性空間，是指 E 上附有 (T_1) 型拓撲結構[2]，使

$$(x, y) \to x + y \quad (x, y \in E);$$
$$(x, \alpha) \to \alpha x \quad (x \in E, \alpha \in K)$$

各是由 $E \times E$ 到 E 及由 $E \times K$ 到 E 中的連續映像．

註 1．特別，在定義中令 $\alpha = -1$，可知 $x \to -x$ 是由 E 到 E 上的連續映像，從而拓撲綫性空間一定是拓撲加羣[2]． 因此，拓撲羣的一般性質也是拓撲綫性空間所具有的． 特別，拓撲綫性空間必是正則的拓撲空間，也是 (T_2) 型空間．

註 2．設 $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$，那末

$$x \to \alpha x, \quad x \to \frac{1}{\alpha} x$$

是相逆的映像．依定義，這兩個映像都是連續的，從而 $x \to \alpha x$ 是由 E 到它自己之上的同胚映像．因此，如果 $X(\subset E)$ 有某一拓撲性質，那末

1) 關於綫性空間，請讀者參看下列一些書：
И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре (劉亦珩譯，一次代數學)；
А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры (柯召譯，綫代數基礎)；
Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц (柯召譯，矩陣論)；
Г. Е. Шилов, Введение в теорию линейных пространств, 1952. Halmos, Finite dimensional vector spaces.

2) 關於拓撲空間與拓撲羣的初步知識，請參看 Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 1954 (第一版有英文譯本)．

$\alpha X(\alpha \neq 0)$也有同樣的性質．特別，如果V是$x(\in E)$的鄰域，那末只要$\alpha \neq 0$，集αV也是αx的鄰域．

註 3．有時我們不加(T_1)型的假設，而只考E上賦任意拓撲結構的情形，這時，我們稱E爲非分離的拓撲綫性空間．這名詞不甚精確，因爲依照定義1，這已不是拓撲綫性空間了．我們也稱它作廣義拓撲綫性空間．

例．1）設Ω是任意集，設定義在Ω上並在數域K中取值的某些函數$x(t)(t\in\Omega)$按平常函數的加法與數乘法

$$(x+y)(t)\equiv x(t)+y(t),\qquad (\alpha x)(t)\equiv \alpha x(t)\qquad (t\in\Omega)$$

組成一個K上的綫性空間E．特別，如E包括Ω上一切在K中取值的函數，那末E表示成$\mathfrak{f}(\Omega)$．實際上，可以看成是K的冪集K^{Ω}，而上述一般的E是K^{Ω}的子集．如果規定E上的拓撲結構爲K上平常拓撲結構的冪結構在子集E上誘導出來的相對拓撲結構，那末，E中點x的一個基本鄰域組由一切如下的集組成：

$$U(x_0;t_1,\cdots,t_n;\varepsilon)\equiv\left\{x(t)\,\Big|\,|x(t_i)-x_0(t_i)|<\varepsilon,1\leqslant i\leqslant n\right\},$$

這裏$t_i\in\Omega(1\leqslant i\leqslant n)$是任意有窮多個點，$n$是任意自然數，$\varepsilon$是任意正數．這確是一個基本鄰域組，因爲[1)]

$$U(x_0;t_1,\cdots,t_n;\varepsilon/2)+U(y_0;t_1,\cdots,t_n;\varepsilon/2)\subset U(x_0+y_0;t_1,\cdots,t_n;\varepsilon);$$

$$U\left(x_0;t_1,\cdots,t_n;\frac{\varepsilon}{2(|\alpha_0|+1)}\right)\cdot S\left(\alpha_0;\frac{\varepsilon}{2\left[\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_0(t_i)|+1\right]}\right)\subset$$
$$\subset U(\alpha_0x_0;t_1,\cdots,t_n;\varepsilon),$$

這裏$S(\alpha_0;\eta)$表示數集$\left\{\alpha\,\Big|\,|\alpha_0-\alpha|<\eta\right\}$．從而定義1中的兩個條件滿足，於是$E$成爲拓撲綫性空間．

更多的例將在後面舉出．

1）在綫性拓撲空間中，如A,B是兩子集，那末我們用$A+B$表示集$\{x+y\,|\,x\in A,y\in B\}$；而如$M$是$K$的子集，那末用$MA$表示集$\{\alpha x\,|\,\alpha\in M,x\in A\}$；如果$B=\{y\}$，$M=\{\mu\}$各只由一個元組成，則把$A+B$，$MA$各簡單地表成$A+x$，$\mu A$，而$M\{y\}$表成$My$．

2）反例．我們知道 Baire 零空間既是綫性空間，又是拓撲（距離）空間，但它却不是綫性拓撲空間．實際上，令

$$x=(1,1,1,\cdots),$$

那末

$$\frac{1}{n}x=\left(\frac{1}{n},\ \frac{1}{n},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right),$$

從而[1] $\left(\Theta,\ \frac{1}{n}x\right)=1$，即 $\frac{1}{n}x\not\to\Theta(n\to\infty)$．所以 $(x,\alpha)\to\alpha x$ 不是連續映像！

定理 1． 為了數域 K 上的綫性空間 E 是拓撲綫性空間，必須且只須 E 中有一組子集 $\mathfrak{U}=\{U\}$，滿足下列諸條件：

1）$\bigcap\limits_{U\in\mathfrak{U}}U=\{\Theta\}$；

2）$U,V\in\mathfrak{U}\Longrightarrow\exists W\in\mathfrak{U},\ W\subset U\cap V$；

3）$U\in\mathfrak{U}\Longrightarrow\exists V\in\mathfrak{U}$，使 $V+V\subset U$；

4）如果 $U\in\mathfrak{U}$，那末必存在 $V\in\mathfrak{U}$，使 $|\alpha|\leqslant 1\ (\alpha\in K)\Longrightarrow\alpha V\subset U$；

5）對於每個 $x\in E$ 及每個 $U\in\mathfrak{U}$，存在一數 $\alpha\in K$，使 $x\in\alpha U$．

這時，拓撲綫性空間的拓撲結構，乃是由取 $\{x+U\,|\,U\in\mathfrak{U}\}$ 作點 x 的基本鄰域組而規定出來的（$x\in E$）．

註．注意由 3）可知，對於每個 $U\in\mathfrak{U}$ 及任意自然數 n，可以找到 $V\in\mathfrak{U}$，使

$$\underbrace{V+V+\cdots+V}_{n\text{ 項}}\subset U.$$

事實上，取 $2^k\geqslant n$．令 $U=V_0$，而依次取 $V_i\in\mathfrak{U}$，使

$$V_i+V_i\subset V_{i-1}\ (1\leqslant i\leqslant k),$$

那末

$$\underbrace{V_k+\cdots+V_k}_{2^k\text{ 項}}\subset\underbrace{V_{k-1}+\cdots+V_{k-1}}_{2^{k-1}\text{ 項}}\subset\cdots\subset V_0.$$

1）在綫性空間中，我們用 Θ 表示零元，即"零矢"．$\Theta+x=x+\Theta=x$．我們有 $0\cdot x=\Theta$，$\alpha\cdot\Theta=\Theta$ 對任意 $x\in E$，$\alpha\in K$ 成立．

既然 $n \leqslant 2^k$，而$V_k \ni \Theta$（依 1)），從而

$$\underbrace{V_k + \cdots + V_k}_{n\text{項}} \subset \underbrace{V_k + \cdots + V_k}_{n\text{項}} + \underbrace{\Theta + \cdots + \Theta}_{2^k - n\text{項}} \subset V_0 = U.$$

證．1) 必要性．設E是拓撲綫性空間．令$\mathfrak{U}$表示Θ的完全鄰域組$\mathfrak{V}(\Theta)$，這時，1) 與 2) 是顯然的．由於$\Theta = \Theta + \Theta$，3)是和 $x + y$ 的連續性的直接後果． 今證 4)，由於$(x,\alpha) \to \alpha x$ 的連續性，對於$U \in \in \mathfrak{V}(\Theta)$，可以找到一個 $\delta > 0$ 及 $W_1 \in \mathfrak{V}(\Theta)$，使$|\alpha| \leqslant \delta$, $y \in W_1 \Longrightarrow \alpha y \in \in U$．令 $W = \delta W_1$，那末依定義 1 下註 2，$W \in \mathfrak{V}(\Theta)$，而

$$|\beta| \leqslant 1,\ x \in W \Longrightarrow x = \delta z,\ z \in W_1,\ \text{即}\ \beta x = \beta\delta z,$$

這裏$|\beta\delta| \leqslant \delta$, $z \in W_1$，所以 $\beta x = (\beta\delta) z \in U$．

再證 5)． 因爲對於一切 $x \in E$, $0 \cdot x = \Theta$，所以對於任意 x 及任意 $U \in \mathfrak{V}(\Theta)$，可以取 x 的鄰域 V，使

$$|\alpha| < \delta \Longrightarrow \alpha V \subset U,$$

特別是存在 $\alpha \neq 0$，使 $\alpha x \in \alpha V \subset U$，即 $x \in \frac{1}{\alpha} U$．必要性證完．

2) 充分性．設在定理中諸條件成立．令

$$\mathfrak{V}(x) = \left\{V \middle| V \subset E,\ \exists U \in \mathfrak{V},\ V \supset x + U\right\},$$

首先證明 $\mathfrak{V}(x)$ 可取作 x 的鄰域組．依 1)，

$$V \in \mathfrak{V}(x) \Longrightarrow x = x + \Theta \in V.$$

對於任意 $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}(x)$，存在 $U_1, U_2 \in \mathfrak{V}$，使

$$x + U_i \subset V_i (1 \leqslant i \leqslant 2),$$

而又依 2)，存在 $W \in \mathfrak{V}$，使 $W \subset U_1 \cap U_2$，所以

$$x + W \subset (x + U_1) \cap (x + U_2) \subset V_1 \cap V_2.$$

對於任意 $x + U \in \mathfrak{V}(x)$，依 3) 存在 $V \in \mathfrak{V}$，使 $V + V \subset U$，從而（因爲 $\Theta \in U$）$V \subset U$，而且

$$y \in V \Longrightarrow y + V \subset V + V \subset U,$$

即

$$y \in x + V \Longrightarrow y + V \subset x + U,$$

從而 $x + U \in \mathfrak{V}(y)$．於是 $\mathfrak{V}(x)$確滿足鄰域組的性質．依 1)，由這鄰域組在E上定義出來的拓撲結構是(T_1)型的．我們證明按這個拓撲結

構，$(x, y) \to x + y$，$(x, \alpha) \to \alpha x$ 都是連續的.

對於每個 $x + y + U(U \in \mathfrak{U})$，依 3) 可取 $V \in \mathfrak{U}$，使 $V + V \subset U$，所以

$$x + V + y + V \subset x + y + U,$$

即和 $x + y$ 是由 $E \times E$ 到 E 的連續映像. 今令 $y = \gamma x (\gamma \in K)$. 我們要證明對於每個 $U \in \mathfrak{U}$，必存在 $\delta > 0$ 及 $V \in \mathfrak{U}$，使

$$|\xi| < \delta \Longrightarrow (\gamma + \xi)(x + V) \subset y + U,$$

也就是要證

$$\xi \cdot x + (\gamma + \xi) V \subset U.$$

為了達到這一目的，先依 3) 取 $W \in \mathfrak{U}$，使 $W + W \subset U$. x 既已固定，可取 $\delta_1 > 0$，使 $|\alpha| < \delta_1 \Longrightarrow \alpha x \in W$. 這是可能的，因為依 4) 先取 $W_1 \in$ $\in \mathfrak{U}$，使

$$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha W_1 \subset W.$$

再依 5) 取 $\beta \neq 0$，使 $x \in \beta W_1$，所以

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{|\beta|} \equiv \delta_1 \Longrightarrow \alpha x \in \alpha \beta W_1 \subset W.$$

取自然數 $N = [|\gamma| + 1]$（這表示不超過 $|\gamma| + 1$ 的最大整數）. 依 3) 取 W_2，使（見本證明前的註）

$$\underbrace{W_2 + W_2 + \cdots + W_2}_{N\text{項}} \subset W.$$

由 4) 取 W_3，使 $|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha W_3 \subset W_2$. 於是令 $\delta_2 = [|\gamma| + 1] - |\gamma|$，而 $|\xi| < \delta_2$，那末

$$(\gamma + \xi) W_3 \subset (|\gamma| + \delta_2) W_2 = [|\gamma| + 1] W_2 \subset$$
$$\subset \underbrace{W_2 + \cdots + W_2}_{N\text{項}} \subset W.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} (> 0)$，那末

$$|\xi| < \delta \Longrightarrow \xi x + (\gamma + \xi) W_3 \subset W + W \subset U.$$

證完.

註. 1) 取任意綫性空間 E，取其一族綫性子空間 $\mathfrak{S} = \{S_\iota\}_{\iota \in I}$，使

滿足下列諸條件：

i) $\bigcap_{\iota \in I} S_\iota = \{\Theta\}$；

ii) $S_{\iota_1}, S_{\iota_2} \in \mathfrak{S} \Longrightarrow S_{\iota_1} \cap S_{\iota_2} \in \mathfrak{S}$.

取 γ 作定理 1 中的 $\mathfrak{U}$，那末定理 1 中的 1)—4) 都滿足，因爲 $S_\iota + S_\iota = S_\iota, \alpha S_\iota = S_\iota$. 依上面定理充分性的證明，$\mathfrak{S}$ 在 E 上定義一拓撲結構，但 E 並不是這裏所謂綫性拓撲空間，因爲設 $x \neq \Theta$，而設 V 表示 E 中不含 x 的一個綫性子空間，那末 5) 不成立．注意，Baire 零空間乃是這一類空間的特例，這時 $I = \{1, 2, 3, \cdots\}$，S_n 表示空間中前 n 個坐標爲 0 的數列所組成的綫性子空間．這種綫性空間的研究與這裏所論者無關．

2) 非 (T_2) 型的拓撲綫性空間的特徵乃是 2)—5) 與 1) 的減弱形式 1')：

1') $U \in \mathfrak{U} \Longrightarrow U \ni \Theta$.

3) 定理 1 中的條件便於檢驗，所以在判別一個綫性空間能否成爲拓撲綫性空間時，這些條件比定義 1 更便於使用．

例 1．空間 $\mathfrak{K}(\Omega)$．設 Ω 表示一局部緊拓撲空間（例如歐幾里得 n 維空間 R^n），而 $\mathfrak{K}(\Omega)$ 表示定義在 Ω 上，在數域 K 中取值並且在某（隨函數而不同的）緊集外等於 0 的函數 $x(t)$ 的全體，那個緊集叫做相應函數的支柱．令 Δ 表示 Ω 中緊集所成的族；令

$$U_{D,\varepsilon} = \left\{x \,\middle|\, t \in D \Longrightarrow |x(t)| < \varepsilon\right\},$$

這裏 $D \in \Delta$，$\varepsilon > 0$．不難看出 $\left\{U_{D,\varepsilon} \,\middle|\, D \in \Delta, \varepsilon > 0\right\}$ 滿足定理 1 中關於 $\mathfrak{U}$ 的條件，從而 $\mathfrak{K}(\Omega)$ 按照上述拓撲結構形成拓撲綫性空間．注意在 $\mathfrak{K}(\Omega)$ 中，$x_n(t) \to x(t)$ 表示函數列 $\{x_n(t)\}$ 在 Ω 的每個緊集上一致收斂於 $x(t)$．

例 2．空間 Σ．設 Σ 表示定義在 n 維歐幾里得空間 R^n 上的一切無窮次可微分並滿足下列條件的複數值函數 $x(t)$ 的全體．對於任意 $p = (p_1, \cdots, p_n)$ 及自然數 q，存在常數 C_{pq}，使

$$|D^p x(t)| \leqslant \frac{C_{pq}}{(1 + |t|^2)^q},$$

這裏 $t=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是 n 數組，$|t|=\sqrt{t_1^2+t_2^2+\cdots+t_n^2}$，$p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$表示 n 個整數形成的數組，而

$$D^p x(t) \equiv \frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n} x(t_1, \cdots, t_n)}{\partial t_1^{p_1} \partial t_2^{p_2} \cdots \partial t_n^{p_n}}.$$

令

$$V(m, q; \varepsilon) \equiv \left\{x \,\middle|\, (1+|t|^2)^q |D^p x(t)| \leqslant \varepsilon, |p| \leqslant m\right\},$$

這裏 $p=(p_1, \cdots, p_n)$，$|p|=\sqrt{p_1^2+p_2^2+\cdots+p_n^2}$，$m$，$q$ 是自然數，$\varepsilon>0$。 不難驗明，Σ 是複綫性空間，而 $\{V(m, q; \varepsilon) | m, q$ 自然數，$\varepsilon>0\}$ 滿足定理 1 中的條件。 事實上，如果 x 含在一切 $V(m, q; \varepsilon)$ 中，那末對於一切 $\varepsilon>0$，

$$|x(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{(1+|t|^2)} \leqslant \varepsilon,$$

從而 $x(t)=0\ (t \in R^n)$。又

$$V(m, q; \varepsilon) \cap V(m_1, q_1; \varepsilon_1) \supset$$

$$\supset V(\max(m, m_1), \max(q, q_1), \min(\varepsilon, \varepsilon_1)),$$

$$V\left(m, q; \frac{\varepsilon}{2}\right)+V\left(m, q; \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset V(m, q; \varepsilon),$$

$$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha V(m, q; \varepsilon) \subset V(m, q; \varepsilon).$$

取 $x \in \Sigma$，取固定的 $V(m, q; \varepsilon)$，那末依 Σ 的定義，對於任意 p 及自然數 q，存在 C_{pq}，使

$$(1+|t|^2)^q |D^p x(t)| \leqslant C_{pq}.$$

所以

$$(1+|t|^2)^q |D^p x(t)| \leqslant \max_{|p| \leqslant m} C_{pq} \equiv C_q^{(m)}.$$

因此

$$\frac{\varepsilon}{C_q^{(m)}} x \in V(m, q; \varepsilon).$$

於是證明了 Σ 是拓撲綫性空間。注意，在 Σ 中，$x_k(t) \rightarrow x(t)$表示 $x_k(t)$ 的各階導數 $D^p x_k(t)$ 在每個緊集 $\subset R^n$ 上一致收斂於 $D^p x(t)$，並且對於任意自然數 q 及 $p=(p_1, \cdots, p_n)$，必存在一個與 k 無關的正常數 C_{pq}，使

$$|D^p x_k(t)| \leqslant \frac{C_{pq}}{(1+|t|^2)^q}.$$

例3. 空間 $\mathscr{E}$. 設$\mathscr{E}$表示 R^n 上一切無窮次可微分的複數值函數的全體所組成的綫性空間. 令

$$V(m, \varepsilon; B) = \left\{x(t) \middle| x \in \mathscr{E}, t \in B, |p| \leqslant m \Longrightarrow |D^p x(t)| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

注意

$$V(m, \varepsilon; B) \cap V(m_1, \varepsilon_1, B_1) \supset V(\max(m, m_1), \min(\varepsilon, \varepsilon_1); B \cup B_1),$$

$$V\left(m, \frac{\varepsilon}{2}; B\right) + V\left(m, \frac{\varepsilon}{2}; B\right) \subset V(m, \varepsilon; B),$$

$$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha V(m, \varepsilon; B) \subset V(m, \varepsilon; B);$$

而對於任意 $x \in \mathscr{E}$ 及固定的緊集 B 與自然數 m, 數 $\varepsilon > 0$, 令

$$\mu = \sup_{\substack{t \in B \\ |p| \leqslant m}} |D^p x(t)|,$$

那末顯然 $\mu < \infty$, 而 $\frac{\varepsilon}{\mu} x \in V(m, \varepsilon; B)$. 因此可以看出 $\mathscr{E}$ 是拓撲綫性空間. 在 $\mathscr{E}$ 中, $x_n(t) \to x(t)$表示 $x_n(t)$的各階導數 $D^p x_n(t)$在 R^n 的每個有界集上一致收斂於0.

例 4 (反例). 空間 $\mathscr{D}$. 設 $\mathscr{D}$ 表示定義在 R^n 上的一切在某(依賴於函數的)緊集外等於 0 的無窮次可微分的複數值函數 $x(t)$的全體. 令

$$V = (m, B; \varepsilon) =$$
$$= \left\{x \middle| x \in \mathscr{D}, t \notin B \Longrightarrow x(t) = 0, |p| \leqslant m \Longrightarrow |D^p x(t)| \leqslant \varepsilon\right\},$$

這裏 m 是自然數, $\varepsilon > 0$, B 是 R^n 中的緊集. 注意

$$\mathfrak{U} = \{V(m, B; \varepsilon)\}$$

滿足定理 1 的 1)—4), 但不滿足 5), 因爲如果

$$\overline{\{t | x(t) \neq 0, t \in R_n\}} = B,$$

那末, 如令緊集 B_1 與 B 不相交, 無論如何取數 α, 總不能使 $x \in \alpha V(m; B_1; \varepsilon)$. 從而 $\mathscr{D}$ 不是拓撲綫性空間.

對於這種空間, 常規定 $x_k(t) \to x(t)$, 是指存在緊集 $B \subset R^n$, 使對於任意自然數 m 及 $\varepsilon > 0$, 必存在一自然數 $n_0 = n_0(\varepsilon, m)$, 使

$$k \geqslant n_0 \Longrightarrow x_k \in V(m; B; \varepsilon).$$

這種空間 $\mathscr{D}$ 叫做僞拓撲綫性空間.

例 5. 設(E, μ)是一個測度空間, μ 是相應的測度[1]. 令 $M_0(E, \mu)$ 表示E上一切按測度μ殆遍有界的可測實值函數的全體;令[2]

$$U_\varepsilon = \left\{x(t) \,\middle|\, x \in M_0(E, \mu); |x(t)| \leqslant \varepsilon \text{ p.p.}\right\},$$

那末定理1中的條件 2)—5) 都滿足, $\mathfrak{U} = \{U_\varepsilon | \varepsilon > 0\}$. 於是 $M_0(E, \mu)$ 是非分離的拓撲綫性空間.

例 6. 設 $S_0(E, \mu)$表示測度空間(E, μ)上一切可測且殆遍有窮的(實或複值)函數 $x(t)$的全體. 令

$$U_{\varepsilon, \delta} = \left\{x \,\middle|\, \mu\left\{t \,\middle|\, |x(t)| > \varepsilon\right\} < \delta\right\},$$

這裏 ε, δ 是兩個正數, 那末

$$U_{\varepsilon, \delta} \cap U_{\varepsilon_1, \delta_1} \supset U_{\max(\varepsilon, \varepsilon_1); \min(\delta, \delta_1)},$$

$$U_{\varepsilon/2, \delta/2} + U_{\varepsilon/2, \delta/2} \subset U_{\varepsilon, \delta};$$

$$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha U_{\varepsilon, \delta} \subset U_{\varepsilon, \delta}.$$

所以定理1中的 2) 3) 4) 都滿足. 給定 $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ 及 $x \in S_0(E, \mu)$, 那末, 由於 $x(t)$殆遍有窮, 所以

$$\mu\left\{t \,\middle|\, |x(t)| = \infty\right\} = 0.$$

但

$$\left\{t \,\middle|\, |x(t)| = \infty\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{t \,\middle|\, |x(t)| \geqslant n\right\},$$

所以如果 $\mu(E) < +\infty$, 必然[3]

$$0 = \mu\left\{t \,\middle|\, |x(t)| = \infty\right\} = \lim_{n \to \infty} \mu\left\{t \,\middle|\, |x(t)| \geqslant n\right\},$$

從而對於 $\delta > 0$, 必存在自然數 n_0, 使對於每個 $n \geqslant n_0$,

$$\mu\left\{t \,\middle|\, |x(t)| \geqslant n\right\} < \delta.$$

1) 例如見 Halmos, 測度論或河田敬義, 積分論.

2) p.p. 乃是法語 presque partout 的縮寫, 意思就是"殆遍".

3) 當 $\mu(E) = +\infty$ 時, 定理1中的條件5)不必成立. 例如 $E =]-\infty, +\infty[$, $x(t) \equiv t$, 則 $x(t) \in S(E, \mu)$, μ 表示 Lebesgue 測度. 這時滿足 $|x(t)| \geqslant n$ 的 t 所組成的集必是測度無窮的.

於是

$$\mu\left\{t \,\middle|\, \frac{\varepsilon}{n}|x(t)|\geqslant\varepsilon\right\}<\delta,$$

即 $\frac{\varepsilon}{n}x\in U_{\varepsilon,\delta}$.

我們證明了：當 $\mu(E)<\infty$ 時，$S_0(E,\mu)$是廣義拓撲綫性空間.

定義 2. 設 $\varDelta$ 是一個定向半序集，E 是數域 κ 上的綫性空間. 所謂E是賦僞範的空間，是指對於每個$(x,d)\in E\times\varDelta$，有一實數 $\|x\|_d$ 相應，叫做 x 的僞範數，滿足下列條件：

1) $\|x\|_d\geqslant 0$，而且爲了 $x=\Theta$，必須且只須對於一切 $d\in\varDelta$，$\|x\|_d=$ $=0$；

2) 對於每個 $\alpha\in\kappa$，$x\in E$，$d\in\varDelta$，$\|\alpha x\|_d=|\alpha|\|x\|_d$；

3) 對於每個 $e\in\varDelta$，必存在 $d\in\varDelta$，使對於任意 $x,y\in E$，$\|x+y\|_e\leqslant$ $\leqslant\|x\|_d+\|y\|_d$；

4) $d\succ e(d,e\in\varDelta)\Longrightarrow\|x\|_d\geqslant\|x\|_e$.

$\left\{\|x\|_d \,\middle|\, d\in\varDelta\right\}$叫做賦僞範綫性空間$E$上的僞範數族.

註. 在賦僞範綫性空間E上可以定義拓撲結構如下：

令

$$U_{d,\varepsilon}=\left\{x \,\middle|\, x\in E,\|x\|_d<\varepsilon\right\},$$

而令

$$\mathfrak{B}=\left\{U_{d,\varepsilon} \,\middle|\, d\in\varDelta,\ \varepsilon>0\right\}. \tag{1}$$

由 1) 可知定理 1 中的 1) 成立. 如 $d_1, d_2\in\varDelta$，由定向集的定義可知存在 $d\in\varDelta$，使 $d\succ d_1$，$d\succ d_2$，從而，當 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$時，

$$U_{d,\varepsilon}\subset U_{d_1,\varepsilon_1}\cap U_{d_2,\varepsilon_2}.$$

對於 $d\in\varDelta$，按照 3) 取 $e\in\varDelta$，那末

$$U_{e,\varepsilon/2}+U_{e,\varepsilon/2}\subset U_{d,\varepsilon}.$$

又不難看出

$$|\alpha|\leqslant 1\Longrightarrow\alpha U_{d,\varepsilon}\subset U_{d,\varepsilon},$$

而

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{\|x\|_d+1}\Longrightarrow x\in\frac{1}{\alpha}U_{d,\varepsilon},$$

所以由(1)中規定的 $\mathfrak{U}$ 滿足定理 1 的條件 1)—5)，從而賦僞範綫性空間成爲拓撲綫性空間。這裏的拓撲結構叫做由僞範數族 $\left\{\|x\|_d \middle| d\in\Delta\right\}$ 規定的。

例 1. 考察定義 1 下例 1 中的拓撲綫性空間 E. 取 Δ 爲集 Ω 中一切有窮子集按照包含關係 $\subset$ 序次而組成的定向半序集。規定對於 $d\in$ $\in D$, $x\in E$,

$$\|x\|_d=\max_{t\in d}|x(t)|,$$

那末定義 2 中的 1)—4) 都滿足，而且 3) 對於 $d=e$ 成立。

例 2. 在 $\mathfrak{R}(\Omega)$ 中，令對於 Ω 中緊集 B,

$$\|x\|_B=\max_{t\in B}|x(t)|,$$

而緊集族 $D=\{B\}$ 按包含關係序次，那末由僞範數族 $\left\{\|x\|_B \middle| B\in D\right\}$ 規定的拓撲結構就是在定理 1 下例 1 中規定的。

例 3. 在 $\mathscr{E}$ 中，令

$$\|x\|_{(B,m)}=\max_{\substack{|p|\leqslant m,\\ t\in B}}|D^p x(t)|,$$

而令 $D=\{(B,m)\}$ 爲由 R^n 中緊集 B 與自然數 m 組成的序偶按關係

$$(B,m)\prec(B_1,m_1)\Longleftrightarrow B\subset B_1,\ m\leqslant m_1$$

序次而成的定向半序集，那末 $\mathscr{E}$ 成爲賦僞範綫性空間，並且由這個僞範數族決定的拓撲空間就是在定理 1 下例 3 中所規定的。

例 4. 考綫性空間 $M_0(E,\mu)$. 設 Δ 表示 E 中一切 μ-測度等於 0 的集按包含關係 $\supset$ 組成的半序定向集：

$$d_1,\ d_2\in\Delta,\ d_1\succ d_2\Longleftrightarrow d_1\subset d_2.$$

對於 $x\in M_0(E,\mu)$，令

$$\|x\|_d=\sup_{t\in E\setminus d}|x(t)|.$$

這時不能保證 $\|x\|_d<+\infty$，而且 $\|x\|_d=0$ 凡 $d\in\Delta\Longleftrightarrow x(t)$ p.p. $=$ $=0$.

定理 2. 爲了數域 K 上綫性空間 E 是拓撲綫性空間，必須且只須它的拓撲結構可以由一族僞範數規定。

證. 充分性已經在定義 2 下註中證明了，現在證明必要性。

設E是拓撲綫性空間．按定理1，取一個滿足定理1中條件1)—5)的子集族$\mathfrak{U}$．令Δ表示$\mathfrak{U}$按包含關係$\supset$序次而得到的定向半序集：

$$U_1 \succ U_2 \Longleftrightarrow U_1 \subset U_2 \ (U_1, U_2 \in \mathfrak{U}).$$

依定理1之2)，這半序集確是定向的．必要時用$-U \cap U$代替U，可以設$\mathfrak{U}$中一切集U都是對稱的：$U = -U$．這是可能的，因爲對稱鄰域組成Θ的基本鄰域組．規定

$$\|x\|_U = \inf\left\{|\alpha| \,\middle|\, x \in \alpha U\right\}.$$

依定理1的5)，對於每個$x \in E$，$U \in \mathfrak{U}$，$\|x\|_U$是有定義的實數．設對於一切$U \in \mathfrak{U}$，$\|x\|_U = 0$，那末依定理1的4)，對於每個$U \in \mathfrak{U}$，存在$V \in \mathfrak{U}$，使$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha V \subset U$，而因爲$\|x\|_V = 0$，所以對於每個$\varepsilon > 0$，存在$\alpha$，使$|\alpha| < \varepsilon$，$x \in \alpha V$．如$\varepsilon < 1$，則$x \in U$．$U \in \mathfrak{U}$既是任意的，依定理1的1)，$x = \Theta$．由於

$$x \in \alpha U \Longleftrightarrow \frac{x}{\alpha} \in U \quad (\alpha \neq 0),$$

定義2中的2)是顯然的．取任意$U \in \mathfrak{U}$．依定理1的3)，取$W \in \mathfrak{U}$，使$W + W \subset U$．再依4)取$V \in \mathfrak{U}$，使

$$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha V \subset W.$$

如果$\|x\|_V < \delta_1$，$\|y\|_V < \delta_2$，那末必存在數η_1，η_2，使

$$|\eta_1| < \delta_1, \ |\eta_2| < \delta_2, \ x \in \eta_1 V, \ y \in \eta_2 V.$$

所以

$$x + y \in \eta_1 V + \eta_2 V.$$

但

$$\frac{\eta_1}{|\eta_1| + |\eta_2|} V + \frac{\eta_2}{|\eta_1| + |\eta_2|} V \subset W + W \subset U.$$

所以

$$x + y \in (|\eta_1| + |\eta_2|) U,$$

因此

$$\|x + y\|_U \leqslant |\eta_1| + |\eta_2| < \delta_1 + \delta_2.$$

既然這個不等式對於一切滿足

$$\delta_1 > \|x\|_V, \ \delta_2 > \|y\|_V$$

的正數 δ_1, δ_2 成立，可知

$$\|x+y\|_U \leqslant \|x\|_V + \|y\|_V.$$

如果 $V \subset U (V, U \in \mathfrak{U})$，那末 $x \in \alpha V \Longrightarrow x \in \alpha U$，從而

$$\|x\|_U \leqslant \|x\|_V.$$

於是證明了 $\left\{\|x\|_V \middle| V \in \mathfrak{U}\right\}$ 是滿足定義 2 中諸條件的一個僞範數族．剩下的乃是要證明，這一族僞範數所規定的拓撲結構就是 E 上原來的拓撲結構．事實上，爲了 $\|x\|_U < \epsilon$，必須且只須存在 α，使 $|\alpha| < \epsilon$ 而 $x \in \alpha U$．這時，

$$x \in \alpha U \Longrightarrow x \in U_{U,\epsilon}.$$

反之，對於每個 $V \in \mathfrak{B}(\Theta)$，存在 $U \in \mathfrak{B}(\Theta)$，使

$$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha U \subset V;$$

從而 $U_{U,1} \subset V$．證完．

定義 3． 複數域 K 上的綫性空間 E 中的集 A 叫做均衡的，是指對於每個實數 ϑ 與每個 $x \in A$，必然

$$e^{i\vartheta} x \in A.$$

註．這是實綫性空間中對稱集（即 $x \in A \Longrightarrow -x \in A$）的自然推廣．

定理 3． 在複數（實數）域 K 上的拓撲綫性空間 E 中，Θ 的均衡（對稱）鄰域形成它的一個基本鄰域組．

證．設 $\mathfrak{U}$ 是滿足定理 1 中條件 1)—5) 的一組子集，從而是 Θ 的一個基本鄰域組．對於每個 $U \in \mathfrak{U}$，規定[1]

$$U_1 = \cap \left\{\lambda U \middle| \lambda \in K, |\lambda| = 1\right\}.$$

由定理 1 的 4)，對於每個 $U \in \mathfrak{U}$，必存在 $V \in \mathfrak{U}$，使

$$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha V \subset U.$$

因此

$$|\lambda| = 1, \lambda \in K \Longrightarrow \frac{1}{\lambda} V \subset U, \text{ 即 } V \subset \lambda U.$$

所以 $V \subset U_1 \subset U$，這就是說，$\left\{U_1 \middle| U \in \mathfrak{U}\right\}$ 形成 Θ 的一個基本鄰域組．今

1) 當 K 爲實數域時，$U_1 = -U \cap U$；當 K 是複數域時，$U_1 = \cap\{e^{i\vartheta} U \mid 0 \leqslant \vartheta < 2\pi\}$.

證U_1是均衡的(對稱的). 事實上,對於每個$x\in U_1$與每個滿足$|\lambda|=1$的數$\lambda\in K$,有$\lambda x\in U$,從而對於每個滿足$|\lambda|=1$的$\lambda\in K$, $|\mu|=1\Longrightarrow$ $\Longrightarrow\mu x\in\lambda U$, 所以$\mu x\in U_1$. 證完.

定義 4. 綫性空間中的集A叫做凸的,是指對於任意$x, y\in A$及滿足$0\leqslant\alpha\leqslant 1$的實數$\alpha$, 必然

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in A.$$

例. 在$\mathfrak{K}(\Omega)$中,集

$$U_{B,\varepsilon}=\left\{x\,\middle|\,t\in B\Longrightarrow|x(t)|<\varepsilon\right\}$$

(B是Ω中緊子集, $\varepsilon>0$)是凸的. 在Σ中,集

$$V(m, q;\varepsilon)\equiv\left\{x\,\middle|\,(1+|t|^2)^q|D^p x(t)|\leqslant\varepsilon, |p|\leqslant m\right\}$$

是凸集. 在$\mathscr{E}$中,

$$V(m,\varepsilon;B)\equiv\left\{x\,\middle|\,x\in\mathscr{E}, t\in B, |p|\leqslant m\Longrightarrow|D^p x(t)|\leqslant\varepsilon\right\}$$

是凸集. 在$S_0(E,\mu)$中,集

$$U_{\varepsilon,\delta}=\left\{x\,\middle|\,\mu\left\{t\,\middle|\,|x(t)|>\varepsilon\right\}<\delta\right\}$$

不必是凸集. 例如取$\varepsilon=\dfrac{1}{3}$, $E=[0,1]$, μ表平常的 Lebesgue 測度, 令[0, 1]中有兩不交區間A, B, $\mu A=\dfrac{2}{3}\delta$, $\mu B=\dfrac{2}{3}\delta$, 令x, y各表A, B的特徵函數, 那末x, $y\in U_{\varepsilon,\delta}$, 但如$\alpha=\dfrac{1}{2}$, 則

$$\alpha x+(1-\alpha)y\notin U_{\varepsilon,\delta}.$$

定義 5. 綫性空間E上的僞範數$\|x\|_d$叫做擬範數, 是指它滿足三角形不等式:對於任意x, $y\in E$, 有

$$\|x+y\|_d\leqslant\|x\|_d+\|y\|_d.$$

如果擬範數$\|x\|_d$還滿足

$$x=\Theta\Longleftrightarrow\|x\|_d=0,$$

$\|x\|_d$叫做範數. 綫性空間,賦以由一個範數決定的拓撲結構, 叫做賦範綫性空間.

例 1. 定義 2 下例 1、2、3 中的僞範數都是擬範數.

例 2. 如果Ω是緊(T_2)型空間, 而$C(\Omega)$表示Ω上一切連續(復值

或實值)函數全體所形成的綫性空間．令

$$\|x\| = \max_{t\in\Omega}|x(t)|,$$

那末不難看出$\|x\|$是範數．但定義2下例1中的擬範數$\|x\|_\Omega$當Ω是無窮集時不是範數．

例3．考察$[0,1]$上一切可測並且q次冪有和的函數全體L^q，這裏$0<q<1$．令

$$\|x\| = \left[\int_0^1 |x(t)|^q\,dt\right]^{1/q},\quad x\in L^q.$$

不難驗明

$$\|x+y\| \leqslant 2^{\frac{1-q}{q}}(\|x\|+\|y\|),$$

從而如果$x,y\in L^q$，$x+y$也含在L^q中，即L^q是綫性空間．令$\|x\|_m =$
$= 2^{\frac{1-q}{q}\cdot m}\|x\|$，那末自然數$m$的全體按照自然序次是定向半序集，而$\{\|x\|_m\}_{m=1,2,\cdots}$是僞範數族，但

$$\|x\|_m = 0(\text{一切 } m) \Longleftrightarrow x(t)=0 \text{ p.p.},$$

$$\|x+y\|_m \leqslant \|x\|_{m+1} + \|y\|_{m+1}.$$

但$\|x\|_m$不是擬範數．

定義6． 數域K上的拓撲綫性空間E叫做局部凸的，是指在E中Θ有一由凸集組成的基本鄰域組．

定理4． 數域K上的局部凸拓撲綫性空間E中零元Θ恆有一基本鄰域組，其中每一鄰域不但是凸的，而且是均衡的(或對稱的，如果K是實數域)．

證． 只須證明在定理3的證明中，如設U是凸的，相應的U_1也是凸的，這裏

$$U_1 = \cap\left\{\lambda U \,\middle|\, |\lambda|=1,\ \lambda\in K\right\}.$$

事實上，如果$x,y\in U_1$，$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，$|\lambda|=1$，那末

$$\lambda^{-1}x\in U,\quad \lambda^{-1}y\in U,$$

所以

$$\lambda^{-1}(\alpha x + (1-\alpha)y)\in U.$$

即對於每個滿足$|\lambda|=1$的$\lambda\in K$,

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in\lambda U,$$

從而

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in U_1.$$

證完.

註. 注意,如取U爲均衡且凸的,那末

$$|\lambda|\leqslant 1,\ x\in U\Longrightarrow|\lambda|x=|\lambda|x+(1-|\lambda|)\Theta\in U,$$

而因$\left|\dfrac{\lambda}{|\lambda|}\right|=1$如果$\lambda\neq 0$,當$\lambda=0$時,$|\lambda|=\lambda$,從而無論如何,$\lambda x\in$ $\in U$,這就是說,這時定理1中條件4)可以加強成

$$|\alpha|\leqslant 1\Longrightarrow\alpha U\subset U.$$

定理5. 爲了數域K上的拓撲綫性空間E是局部凸的,必須且只須E的拓撲結構可以由一族擬範數$\{\|x\|_d\,|\,d\in\varDelta\}$規定.

證 1). 充分性. 設有一族擬範數$\{\|x\|_d\,|\,d\in\varDelta\}$規定$E$的拓撲結構,而令$U_{d,\varepsilon}$是定義2下註中所規定的鄰域. 如果

$$x,\ y\in U_{d,\varepsilon},\ 且\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1,$$

那末

$$\begin{aligned}\|\alpha x+(1-\alpha)y\|_d&\leqslant\|\alpha x\|_d+\|(1-\alpha)y\|_d=\\&=\alpha\|x\|_d+(1-\alpha)\|y\|_d<\alpha\varepsilon+(1-\alpha)\varepsilon=\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in U_{d,\varepsilon},$$

即$U_{d,\varepsilon}$是凸的. 既然$\{U_{d,\varepsilon}\,|\,d\in\varDelta,\ \varepsilon>0\}$是$\Theta$的基本鄰域組,所以$E$是局部凸的.

2) 必要性. 設E是局部凸綫性空間,從而依定理4可設Θ有一基本鄰域組$\mathfrak{U}=\{U\}$,使每個$U\in\mathfrak{U}$是均衡(對稱)且凸的. 定義僞範數$\|x\|_U(U\in\mathfrak{U})$如定理2,今證這些僞範數滿足三角形不等式. 事實上,在定理2的證明中,如果

$$\|x\|_U<\delta_1,\ \|y\|_U<\delta_2,$$

那末必存在$\eta_1,\ \eta_2\in K$,使$0<|\eta_1|<\delta_1,\ 0<|\eta_2|<\delta_2$,而

$$x\in\eta_1 U,\ \ y\in\eta_2 U,$$

從而依U的凸性與均衡(對稱)性,可知(見定理4下的註)

$$x \in |\eta_1| U,\ y \in |\eta_2| U.$$

於是

$$\frac{x+y}{|\eta_1|+|\eta_2|} = \frac{|\eta_1|}{|\eta_1|+|\eta_2|}\cdot\frac{x}{|\eta_1|} + \frac{|\eta_2|}{|\eta_1|+|\eta_2|}\cdot\frac{y}{|\eta_2|} \in U,$$

所以

$$\|x+y\|_U \leqslant |\eta_1| + |\eta_2| < \delta_1 + \delta_2.$$

既然$\delta_1 > \|x\|_U$與$\delta_2 > \|y\|_U$是任意的,所以

$$\|x+y\|_U \leqslant \|x\|_U + \|y\|_U.$$

證完.

定義7. 數域K上的拓撲綫性空間E中的集A叫做有界(或囿)的,是指對於Θ的每個鄰域U,存在$\alpha \in K$,使$A \subset \alpha U$.

註. 利用決定拓撲綫性空間E的拓撲結構的僞範數族,可以把有界集概念定義如下:爲了集A是有界的,必須且只須對於每個$d \in \Delta$,存在$\mu > 0$,使

$$x \in A \Longrightarrow \|x\|_d < \mu.$$

事實上,這條件說明

$$A \subset \mu U_{d,1} = \frac{\mu}{\varepsilon} U_{d,\varepsilon},$$

從而A是有界集;而反之,如果$A \subset \alpha U$,那末

$$x \in A \Longrightarrow \|x\|_U < \alpha.$$

例. 在$\mathfrak{f}(\Omega)$中,

$$A = \left\{ x \middle| x \in \mathfrak{f}(\Omega),\ |x(t)| \leqslant 1,\ t \in \Omega \right\},$$

那末A是有界集,因爲對於定義2下例1中的每個α,

$$x \in A \Longrightarrow \left\| \frac{\varepsilon}{2} x \right\|_d \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

從而$x \in \dfrac{2}{\varepsilon} U_{d,\varepsilon}$. 但如$\Omega$是無窮集,而$d$表示$\Omega$的一個有窮子集,那末

$$A_d \equiv \left\{ x \middle| t \in d \Longrightarrow |x(t)| \leqslant 1,\ x \in \mathfrak{f}(\Omega) \right\}$$

不是有界集,因爲取d_1爲$\Omega \setminus d$中的有窮子集,那末對於鄰域

$$U_{d_1,\varepsilon} = \left\{ x \middle| x \in \mathfrak{f}(\Omega), \|x\|_{d_1} \leqslant \varepsilon \right\},$$

無論 α 如何，

$$A_d \not\subset \alpha U_{d_1,\varepsilon}.$$

定理 6. 在拓撲綫性空間 E 中，

1）有窮集必是有界集；

2）有窮多個有界集的併集仍是有界集；

3）有窮多個有界集的和 $A_1 + \cdots + A_n$ 必是有界集；

4）有界集的子集仍是有界的.

證. 4）是顯然的. 依定理 1 的 5)，由一個元組成的集是有界集，從而本定理中的 1)是 2)的後果. 為了證明 2)，依數學歸納法只須考察兩個有界集 B_1, B_2 的情形. 由 4)，無妨設 B_1, B_2 都含 Θ，但在這條件下，2)又是 3)的後果. 現在就 $n = 2$ 的情形證明 3). 考察 Θ 的任意鄰域 U；取 Θ 的鄰域 V, W，使 $W + W \subset U$，而使

$$|\alpha| \leqslant 1 \Longrightarrow \alpha V \subset W.$$

依假定，存在 $\gamma_1, \gamma_2 \in K$, $\gamma_1 \neq 0 \neq \gamma_2$，使

$$B_1 \subset \gamma_1 V,\ B_2 \subset \gamma_2 V.$$

所以

$$B_1 \cup B_2 \subset B_1 + B_2 \subset \gamma_1 V_1 + \gamma_2 V.$$

但 $x_1 \in B_1$, $x_2 \in B_2 \Longrightarrow \gamma_1^{-1} x_1 \in V$, $\gamma_2^{-1} x_2 \in V$，所以

$$\frac{x_1}{|\gamma_1| + |\gamma_2|} = \frac{\gamma_1}{|\gamma_1| + |\gamma_2|} \cdot \frac{x_1}{\gamma_1} \in W,\ \frac{x_2}{|\gamma_1| + |\gamma_2|} \in W,$$

從而

$$x_1 + x_2 \in (|\gamma_1| + |\gamma_2|) U,$$

這就是說

$$B_1 \cup B_2 \subset B_1 + B_2 \subset (|\gamma_1| + |\gamma_2|) U.$$

證完.

定理 7. 在拓撲綫性空間 E 中，為了集 A 是有界的，必須且只須對於 A 中每一元列 (x_n) $(n = 1, 2, \cdots)$，每一收斂於 0 的正數列 (λ_n)，元列 $(\lambda_n x_n)$ 收斂於 0，換句話說，對於 Θ 的每個鄰域 U，存在自然數 n_0，使 $n \geqslant n_0 \Longrightarrow \lambda_n x_n \in U$.

註. 有界性的這一表達形式是由 Mazur 與 Orlicz 提出的(1933).

證. 1) 充分性. 設 A 滿足定理中的條件. 如果 A 不是囿的,必存在 Θ 的一個鄰域 V, 使對於任意自然數 n,

$$\frac{1}{n}A \not\subset U,$$

即存在 $x_n \in A$, 使

$$\frac{1}{n}x_n \notin U.$$

但另一方面,依假定,當 n 足够大時, $\frac{1}{n}x_n \in U$, 得出矛盾.

2) 必要性. 設 A 是囿集. 取 Θ 的任意鄰域 U; 取 Θ 的鄰域 V, 使 $|\beta| \leqslant 1 \Longrightarrow \beta V \subset U$. 取正數 α, 使 $\alpha A \subset V$. 設 $x_n \to 0$, 必存在 n_0, 使 $n \geqslant n_0 \Longrightarrow |\lambda_n| < \alpha$, 從而對於 $x_n \in A$,

$$\lambda_n x_n \in \lambda_n A \subset \frac{\lambda_n}{\alpha} V \subset U,$$

這就是說, $\lambda_n x_n \to \Theta$.

定理 8. 如果數域 K 上的拓撲綫性空間 E 的一個綫性子空間 G 是具廣義 Baire 性質的,那末它或者是第一綱的,或者與 E 重合.

證. 首先注意數域 K 上的拓撲綫性空間是聯通的. 事實上, 任意半綫 αx($\alpha \geqslant 0$, x 固定)與半直綫同胚,從而是 E 中聯通子集. 所以 E 中任意點 $x \neq \Theta$ 可與 Θ 共屬於 E 中一個聯通集. 依聯通性的定理(第一章), E 是聯通的. 依拓撲學的一個性質,如 G 是第二綱的,那末 G 在 E 中是既開且閉的,從而 $G = E$.

§ 2. 綫性泛函數與綫性算子

定義 1. 由數域 K 上拓撲綫性空間 E_1 到 K 上拓撲綫性空間 E_2 中的**加法齊性**連續映像叫做由 E_1 到 E_2 中的綫性算子. 特別,如果 E_2 是一維的(即 $E_2 = K$), 則相應的綫性算子叫做 E_1 上的綫性泛函數.

定理 1. 爲了由拓撲綫性空間 E_1 到拓撲綫性空間 E_2 中的加法齊性算子 T 是連續的, 必須且只須對於每個 $e \in \Delta_2$ (Δ_2 爲與 E_2 相應的偏

範數族所屬的定向半序集),必存在 $d_1 \in \Delta_1$(Δ_1 爲與 E_1 相應的僞範數族所屬的定向半序集)及 $\mu \geqslant 0$,使對於每個 $x \in E_1$,

$$\|Tx\|_e \leqslant \mu\|x\|_d. \tag{1}$$

證. 1) 必要性. 設 T 是綫性算子,而設(1)不成立,即設存在 $e \in \Delta_2$,使對於任意自然數 n 及每個 $d \in \Delta_1$,必可找到一個元 $x_{n,d} \in E_1$,使

$$\|Tx_{n,d}\|_e > n\|x_{n,d}\|_d. \tag{2}$$

考半序定向點列

$$\left(\frac{x_{n,d}}{n\|x_{n,d}\|_d}\right)_{(n,d)}, \tag{3}$$

這裏半序 $(n, d) \succ (n', d')$ 是按照

$$n \geqslant n', d \succ d'$$

規定的. 因爲

$$d' \succ d \Longrightarrow \left\|\frac{x_{n,d'}}{n\|x_{n,d'}\|_{d'}}\right\|_d \leqslant \left\|\frac{x_{n,d'}}{n\|x_{n,d'}\|_{d'}}\right\|_{d'} = \frac{1}{n},$$

所以對於 Θ 的每個鄰域 $U = U_{d,\varepsilon}$, 只須取 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 及 $d' \succ d$, 即可使

$$\frac{x_{n,d}}{n\|x_{n,d}\|_{d'}} \in U.$$

這乃是說,點列(3)收斂於 Θ. 但依(2),

$$\left\|T\left(\frac{x_{n,d}}{n\|x_{n,d}\|_d}\right)\right\|_e > 1,$$

與 T 的連續性矛盾.

2) 充分性. 設(1)成立; 設 $(x_\sigma)_\sigma$ 是 E_1 中一個收斂於 Θ 的定向半序列. 取定 $\varepsilon > 0$ 及 $e \in \Delta_2$. 依(1)可取 d 及 $\mu > 0$,使

$$\|Tx\|_e \leqslant \mu\|x\|_d.$$

因爲 (x_σ) 收斂於 Θ, 可取 σ_0, 使

$$\sigma \succ \sigma_0 \Longrightarrow \|x_\sigma\|_d < \varepsilon/\mu,$$

所以

$$\sigma \succ \sigma_0 \Longrightarrow \|Tx_\sigma\|_e < \varepsilon,$$

這就是說,對於 E_2 中零點 Θ' 的任意鄰域 $U = U_{e,\varepsilon}$, 存在 σ_0, 使

$$\sigma \succ \sigma_0 \Longrightarrow Tx_\sigma \in U_{e,\varepsilon},$$

所以$(Tx_a) \to \Theta$. 因此T在Θ處連續. 由T的加法性不難看出T到處連續.

系. 綫性算子把囿集映成囿集.

證. 設A是E_1中囿集，即對於每一個$d \in \Delta_1$，存在實數$\kappa_d > 0$，使$\|x\|_d < \kappa_d$對於一切$x \in A$成立. 所以對於每一個$e \in \Delta_2$，依定理1中之(1)，存在$d \in \Delta_1$，使對於每個$x \in A$，

$$\|Tx\|_e \leqslant \mu \|x\|_d < \mu \kappa_d,$$

即$T(A)$是E_2中的囿集.

註. 1) 定理1中所述關於T的性質(1)叫做綫性算子的囿性(=有界性). 定理1可以表達如下:爲了綫性算子T是連續的,必須且只須它是囿的.

2) 特別,由定理1可知:由賦範綫性空間E_1(其範數爲$\|x\|_1$)到賦範綫性空間E_2(其範數是$\|x\|_2$)中的加法齊性算子T是連續的,必須且只須T是囿的,即存在$\mu > 0$, 使對於一切$x \in E_1$,

$$\|Tx\|_2 \leqslant \mu \|x\|_1. \tag{4}$$

定理 2. 設$\{T_\iota\}_{\iota \in I}$是由一個第二綱的拓撲綫性空間$E$到拓撲綫性空間$E_1$中的一族綫性算子;設對於每個$x_0 \in E$, 集

$$A(x_0) \equiv \left\{T_\iota x_0 \middle| \iota \in I\right\}$$

具下列性質:對於E_1中零元Θ'的每個鄰域U,存在自然數k,使$A(x_0) \subset \subset kU$. 那末對於每個$V \in \mathfrak{V}(\Theta')$, 必可找到一個$W \in \mathfrak{V}(\Theta)$, 使對於一切$\iota \in I$,

$$T_\iota(W) \subset V.$$

證. 令

$$R_k \equiv \left\{x \middle| x \in E, \iota \in I \Longrightarrow \frac{1}{k} T_\iota x \in \overline{U}\right\},$$

這裏$\overline{U}$表示U的閉包,而U是選定的Θ'的鄰域,使

$$\overline{U} - \overline{U} \subset V.$$

這樣的鄰域U存在,因爲拓撲綫性空間必是正則拓撲空間. 由於

$$\overset{-1}{T_\iota}(k\overline{U})$$

是閉集，所以

$$R_k \equiv \bigcap_{\iota \in I} \overset{-1}{T}_\iota (k\overline{U})$$

是閉集. 由於關於 $A(x_0)$ 的假定，對於任意 $x_0 \in E$，必存在自然數 k，使

$$A(x_0) \subset kU \subset k\overline{U},$$

所以每個 x_0 必含在一個 R_k 中，即

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k.$$

E 既是第二綱的，必有一個 R_k，表爲 R_{k_0}，是第二綱的. 但

$$R_{k_0} = \overline{R}_{k_0} \supset D(\overline{R}_{k_0}) = \overbrace{D(\overset{\circ}{R}_{k_0})} \supset \overbrace{D(\overset{\circ}{R}_{k_0})} \equiv G$$

是不空開集，這裏 $\overset{\circ}{B}$ 表示集 B 的開核（即含在 B 中的最大開集）. 取 $z \in G$. 如果 $x \in G - z$，那末對於一切 $\iota \in I$，

$$\frac{1}{k_0} T_\iota (x + z) \in \overline{U},$$

$$\frac{1}{k_0} T_\iota x = \frac{1}{k_0} T_\iota (x + z) - \frac{1}{k_0} T_\iota z \subset \overline{U} - \overline{U}.$$

但 $x \to k_0 x$ 是連續映像而 $G - z$ 是 Θ 的鄰域，所以必存在 Θ 的鄰域 W，使 $x \in W \Longrightarrow k_0 x \in G - z$. 所以當 $x \in W$ 時，對於一切 $\iota \in I$，

$$T_\iota x = \frac{1}{k_0} T_\iota (k_0 x) \subset V.$$

這正是所要證的.

註. 注意，在本定理的證明中，並沒有利用到拓撲綫性空間的一切屬性. 特別是在定理 1 的 5 個條件之中，我們只用了 1) 2) 3) 及數乘積 $x \to k_0 x$ 的連續性；拓撲結構的正則性也只由 1) 2) 3) 推出，因爲對於任意 $U \in \mathfrak{B}(\Theta)$，取 $V \in \mathfrak{B}(\Theta)$，使 $V + V \subset U$，並取 V 爲對稱的. 那末 $x \in \overline{V} \Longrightarrow (x + V) \cap V \neq \phi$，取 $z \in (x + V) \cap V$，即 $x = z + v \in \in V + V \subset U (v \in V)$，所以 $\overline{V} \subset U$. 因此，如果 E 是一個 (T_1) 型拓撲（加）羣，同時又是 K 上的綫性空間，使 $x \to \alpha x$ 及 $\alpha \to \alpha x$ 兩運算都是連續的，那末定理 2 仍成立. 特別可以得出下面的系.

系 (Mazur-Orlicz). 設 E 是第二綱的 (T_1) 型拓撲空間,同時它又是實或複綫性空間,使 E 按這綫性空間結構中的加法羣結構與它的拓撲結構成爲拓撲羣. 設 $x \to \alpha x$ 與 $\alpha \to \alpha x (\alpha \in K, x \in E)$ 各是由 E 到 E 中與由 K 到 E 中的連續映像,那末 $(\alpha, x) \to \alpha x$ 是由 $K \times E$ 到 E 中的連續映像,從而 E 是拓撲綫性空間.

證. 對於每個滿足 $|\alpha| < 1$ 的數 $\alpha \in K$,令

$$T_\alpha x \equiv \alpha x,$$

依假定,T_α 是由 E 到 E 中的綫性算子. 固定 $x_0 \in E$,取 Θ 的鄰域 U,那末由於 $\alpha \to \alpha x$ 的連續性,如取 $\delta > 0$ 相當小,可使對於一切滿足 $|\alpha| < 1$ 的 $\alpha \in K$,

$$\delta \alpha x_0 \in U.$$

特別,可取 δ 爲一個適當大的自然數的倒數,於是 $\{T_\alpha | |\alpha| < 1\}$ 滿足定理 2 的一切條件,從而對於任意 $V \in \mathfrak{B}(\Theta)$,必存在 $W \in \mathfrak{B}(\Theta)$,使對於一切 $|\alpha| < 1$, $\alpha W \subset V$. 於是 $(\alpha, x) \to \alpha x$ 在 $(0, \Theta)$ 處連續. 但 $\alpha x - \alpha_0 x_0 = (\alpha - \alpha_0)(x - x_0) + \alpha_0(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)x_0$,從而 $(\alpha, x) \to \alpha x$ 在 $K \times E$ 中遍處連續.

定理 3. 由實拓撲綫性空間 E 到實拓撲綫性空間 E_0 中的任意加法連續算子必是齊性的(從而是綫性的).

證. 設 T 是由 E 到 E_0 中的加法連續映像. 由 T 的加法性可知,對於一切自然數 n,

$$T(nx) = nTx,$$

從而

$$T(-nx) = -T(nx) = -nTx \quad (n \text{ 自然數}).$$

令 $\rho = \frac{p}{q}$ 是有理數(p, q 整數),不難看出

$$T\left(\frac{p}{q} x\right) = \frac{p}{q} Tx.$$

由 $\alpha \to \alpha x$ 的連續性與 T 的連續性立刻推出所要證的結果.

系. 設 E, E_0 是複拓撲綫性空間,而 T 是由 E 到 E_0 中的一個加法

連續算子,並且 $T(ix) = iTx$ $(i \equiv \sqrt{-1})$,那末 T 是綫性算子.

證. 由定理 3, 當把 E, E_0 看成實綫性空間時, T 是實齊性的,即對於實數 α, $T(\alpha x) = \alpha Tx$. 對於任意複數 $\alpha + i\beta$ (α 與 β 是實數),

$$T((\alpha + i\beta)x) = T(\alpha x) + T(i\beta x) = \alpha Tx + i\beta Tx = \\ = (\alpha + i\beta)Tx.$$

證完.

註. 在上面系中,如果不假定 $T(ix) = iTx$, 結論不必成立.

例. 設 E 表示複數域 K 上的一維空間 $\{\alpha e \mid \alpha \in K\}$, $e \in E$; 設 T 是由 E 到 K 中的加法連續算子, $T((\alpha + i\beta)e) = \alpha$ (α, β = 實數), 那末 $T(ie) = 0 \neq i = if(e)$!

定理 4. 考察數域 K 上的兩個拓撲綫性空間 E_1 與 E_2. 設 $\mathfrak{E}$ 表示由 E_1 到 E_2 中的一切綫性算子的全體($\subset E_2^{E_1}$);設定向集 $D = D_2 \times B_1$ 是定向集 D_2 與 B_1 的積序集,這裏 D_2 是定義 E_2 的拓撲結構的定向集, B_1 是 E_1 中含 Θ 的一切圍集按包含關係 $\subset$ 所組成的定向集(§1 定理 6). 如果 $e = (d, B) \in D$, 對於 $T \in \mathfrak{E}$, 定義

$$\|T\|_e = \sup_{x \in B} \|Tx\|_d, \tag{4}$$

那末 $(\|T\|_e)$ $(e \in D)$ 是 $\mathfrak{E}$ 上一族僞範數,從而在 $\mathfrak{E}$ 上定義一個拓撲綫性空間結構.

證. 依綫性代數,不難看出 $\mathfrak{E}$ 是綫性空間. 由定理 1 及其後的註可知(4)中定義的 $\|T\|_e$ 都是有窮的.

1) 如果 $T = O$ 是零算子(即 $Tx = \Theta$, 一切 x), 那末, 對於每個 $x \in E_1$, $Tx_1 \equiv \Theta'$, 從而 $\|Tx\|_d \equiv 0$, 即 $\|O\|_e = 0$. 反之,如果 $\|T\|_e = 0$ 對一切 $e \in D$ 成立,那末對於 E_1 中含 Θ 的任意圍集 B,

$$x \in B \Longrightarrow \|Tx\|_d = 0,$$

而依 E_2 中的結構, $Tx = \Theta'$. 依 §1 定理 6, 對於每個 $x \in E_1$, 必存在 B_1 中一個集,使這集含 x, 從而 $Tx \equiv \Theta(x \in E_1)$, 即 $T = 0$.

2) 對於任意 $\alpha \in K$, $e = (d, B) \in D$, $T \in \mathfrak{E}$:

$$\|\alpha T\|_e = \sup_B \|\alpha Tx\|_d = \sup_B |\alpha| \|Tx\|_d = |\alpha| \|T\|_e.$$

又如 $T_1, T_2 \in \mathfrak{E}$,

$$\|T_1+T_2\|_e=\sup_E\|T_1x+T_2x\|_d.$$

但依§1定義2的3)，必存在$d'\in D_2$，使

$$\|T_1x+T_2x\|_d\leqslant\|T_1x\|_{d'}+\|T_2x\|_{d'},$$

從而

$$\|T_1+T_2\|_e\leqslant\sup_B\|T_1x\|_{d'}+\sup_B\|T_2x\|_{d'}=$$
$$=\|T_1\|_{(d',B)}+\|T_2\|_{(d',B)},$$

而$(d',B)\in D$.

3) 如$d'>d(d',d\in D_2)$，依§1定義2的4)，$\|Tx\|_{d'}\geqslant\|Tx\|_d$，從而如果$d'>d$, $B'\supseteq B(B,B'\in B_1)$,

$$\|T\|_{(d',B')}=\sup_{x\in B'}\|Tx\|_{d'}\geqslant\sup_{x\in B}\|Tx\|_d=\|T\|_{(d,B)}.$$

證完.

註．由定理的證明可知不必設B_1包括E_1中含Θ的一切有界集，而只設$\mathscr{B}_1$滿足下列諸條件就够了．

(i) B_1是由E_1中含Θ的某些有界集按包含關係$\subset$組成的定向列；

(ii) B_1中的集覆蓋E_1，即對於每個$x\in E$，存在$B\in B_1$，使$x\in\in B$.

以後會用到這一點，請注意．特別下面往往取B_1爲E_1中含Θ的一切有窮子集的全體．

系．設對於每個$y\in E_2$, $\exists x\in E_1$, $T\in\mathfrak{C}$，使$Tx=y$．爲了定理4中的僞範數$\|T\|_e$都是擬範數，必須且只須E_2是局部凸的．

證．如果E_2是局部凸的，依§1定理5，可取定理4中的D_2，使對於每個$d\in D_2$, $\|x\|_d$是擬範數．於是對於每個$x\in E_1$,

$$\|T_1x+T_2x\|_d\leqslant\|T_1x\|_d+\|T_2x\|_d,$$

從而對於任意$T_1,T_2\in\mathfrak{C}$及每個$x\in E_1$, $d\in D_2$, $B\in B_1$, $e=(d,B)$,

$$\|T_1+T_2\|_e=\sup_{x\in B}\|T_1x+T_2x\|_d\leqslant\sup_{x\in B}\|T_1x\|_d+\sup_{x\in B}\|T_2x\|_d=$$
$$=\|T_1\|_e+\|T_2\|_e,$$

從而$\|T\|_e$也是擬範數.

反之，設每個$\|T\|_e$是擬範數．對於每個$x\in E_1$，令B是有界集$\{x, \Theta\}$，那末對於任意$d\in D_2$，

$$\|T_1x+T_2x\|_d=\|T_1+T_2\|_{(d,B)}\leqslant\|T_1\|_{(d,B)}+\|T_2\|_{(d,B)}=$$
$$=\|T_1x\|_d+\|T_2x\|_d.$$

既然依假定當x遍歷E_1而T_1, T_2遍歷$\mathfrak{C}$時，T_1x, T_2x也遍歷E_2，可知$\|y\|_d$ $(y\in E_2)$是擬範數．從而E_2是局部凸的．

註．特別在上面的定理及系中，令$E_2=K$，那末E_2中的拓撲綫性結構由一個單獨的範數$\|\alpha\|\equiv|\alpha|$決定，即D_2由一個元組成．於是拓撲綫性空間E_1上一切綫性汎函數的全體$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}(E)\equiv E^*$組成一個拓撲綫性空間，定義它的拓撲結構的擬範數族是

$$\|f\|_B=\sup_{x\in B}|f(x)|,$$

這裏$\{B\}$是E中一些滿足定理4下註的條件(i)(ii)的有界集的族．特別，取$\{B\}$爲E中含Θ的一切有窮集的全體，那末相應的拓撲結構叫做E^*上的弱拓撲結構．

但在上面却有一點並未說明，即E^*究竟有沒有非零元？沒有非零元只不過是不足道的情形，不引人興趣．

例．設$S[0,1]$表示$[0,1]$上一切殆遍有窮值的可測函數全體按平常運算組成的綫性空間，這時殆遍相等的函數等同起來．按照§1定理1後例6中規定的拓撲結構，$S[0,1]$是拓撲綫性空間．可以證明[1] $S[0,1]$上沒有非零綫性汎函數．

下面將對上面提出的問題給出解答(Lasalle 定理)．在此之前，我們需要一些準備知識，將在下節引入．

§3. 實拓撲綫性空間與複拓撲綫性空間的關係

前面我們考察了複拓撲綫性空間及實拓撲綫性空間的一些性質．設E是複拓撲綫性空間，則顯然它也可以看成是實拓撲綫性空間，只須把數域限制成實數域就够了．下面證明，反之，每個實拓撲綫性空間一定可以自然地擴張成複拓撲綫性空間．本節也考察實綫性汎函數與複

1) 參看關肇直的"汎函分析講義"，高等教育出版社出版．

綫性泛函數的關係．

定理 1．設 E 是實拓撲綫性空間．令 $E_1=\{x+iy \mid x,y\in E\}$，$i=\sqrt{-1}$．在 E_1 中定義運算如下：對於 $x,y,u,v\in E$，α,β 爲實數；$x+iy=u+iv \Longleftrightarrow x=u, y=v$；$(x+iy)+(u+iv)=(x+u)+i(y+v)$；$(\alpha+i\beta)(u+iv)=(\alpha x-\beta y)+i(\beta x+\alpha y)$．對於每個 $U\in\mathfrak{U}$（$\mathfrak{U}$ 表 E 中 Θ 的鄰域組），令 $U_1\equiv\{u+iv \mid u,v\in U\}$，那末 $\mathfrak{U}_1=\{U_1 \mid U\in\mathfrak{U}\}$ 在 E_1 上定義一個拓撲綫性空間的結構，使 E_1 包含一個與 E 代數地同構且拓撲地同胚的實子空間．如果 E 是局部凸的，則 E_1 也是局部凸的．

證．1）設 $x+iy\in E_1$，其中 $x,y\in E$，而 $x+iy$ 屬於一切 $U_1\in\mathfrak{U}_1$，那末，由 E_1 中相等關係的定義，x 與 y 都屬於一切 $U\in\mathfrak{U}$．從而 $x=y=\Theta$，所以 $x+iy$ 是 E_1 中的零元，即 $\mathfrak{U}_1$ 滿足 §1 定理 1 的 1）．

設 $U_1,V_1\in\mathfrak{U}_1$，則 $U_1=U+iU$，$V_1=V+iV$，其中 $U,V\in\mathfrak{U}$．取 $W\in\mathfrak{U}$，使 $W\subset U\cap V$，則 $W_1\equiv W+iW\subset U_1\cap V_1$，從而 $\mathfrak{U}_1$ 也滿足 §1 定理 1 的 2）．又如 $U_1\in\mathfrak{U}_1$，則 $U_1=U+iU$，其中 $U\in\mathfrak{U}$．取 $V\in\mathfrak{U}$，使 $V+V\subset U$，則令 $V_1=V+iV$，於是 $V_1+V_1=V+iV+V+iV=V+V+i(V+V)\subset U+iU=U_1$，即 §1 定理 1 的 3）也滿足．

設 $U_1\in\mathfrak{U}_1$，即 $U_1=U+iU$，$U\in\mathfrak{U}$．取 $W\in\mathfrak{U}$，使 $W+W\subset U$．存在 $V\in\mathfrak{U}$，使對於每個滿足 $|\alpha|\leqslant 1$ 的實數 α，$\alpha V\subset W$．所以對於任意滿足 $|\alpha|\leqslant 1$ 的複數 α 及任意 $V\in V_1\equiv V+iV$，可以寫成 $\alpha=\beta+i\gamma$，其中 β,γ 爲絕對值 $\leqslant 1$ 的實數，而 $V=V_1+iV_2$，其中 $V_1,V_2\in V$．從而 $\alpha V=(\beta V_1-\gamma V_2)+i(\beta V_2+\gamma V_1)\subset W+W+i(W+W)\subset U+iU=U_1$，所以 $|\alpha|\leqslant 1$（α 是複數）$\Longrightarrow \alpha V_1\subset U_1$，即 §1 定理 1 之 4）滿足．

又如 $x_1\in E_1$，$U_1\in\mathfrak{U}$，可以寫成 $x_1=x+iy$，$x,y\in E$，而 $U_1=U+iU$，$U\in\mathfrak{U}$．先取 $V\in\mathfrak{U}$，使 $|\alpha|\leqslant 1$（α 實數）$\Longrightarrow \alpha V\subset U$．依 §1 定理 1 的 5），存在實數 α,β，使 $x\in\alpha V$，$y\in\beta V$，從而 $x_1=x+iy\in\alpha V+$

$+ i\beta V \subset \max(\alpha, \beta)(U + iU) = \max(\alpha, \beta)U_1$；從而 $\mathfrak{U}_1$ 也滿足§1定理1的5)。

從而 E_1 是一個拓撲綫性空間。

2) 如 E 是局部凸的，則 E 中 Θ 有一由凸集組成的基本鄰域組。但如 U 是凸的，則 $U_1 \equiv U + iU$ 也是凸的，因爲如 $x + iy \in U_1$，$u + iv \in \in U_1$，其中 $x, y, u, v \in E$（所以 $\in U$），而 λ 爲實數，且 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，則 $\lambda(x + iy) + (1 \cdot \lambda)(u + iv) = \lambda x + (1 - \lambda)u + i[\lambda y + (1 - \lambda)v] \in \in U + iU = U_1$。從而 E_1 也是局部凸的。

3) 把 E 中元 x 與 E_1 中的元 $x + i\Theta$ 等同起來，從而把 E 嵌入 E_1。此時 $U_1 \cap E = U(U_1 \equiv U + iU)$，從而 E 同構也同胚於 E_1 中一個實子空間。

註．設 f 是 E 上的綫性汎函數，把 f 延拓到 E_1 上：

$$f(u + iv) \underset{df}{=} f(u) + if(v), \quad u, v \in E.$$

因爲

$$\begin{aligned} f(x + iy + u + iv) &= f(x + u) + if(y + v) = \\ &= f(x) + f(u) + if(y) + if(v) = \\ &= f(x + iy) + f(u + iv), \end{aligned}$$

而如 α, β 是實數，

$$\begin{aligned} f((\alpha + i\beta)(u + iv)) &= f(\alpha u - \beta v) + if(\alpha v + \beta u) = \\ &= \alpha f(u) - \beta f(v) + i\alpha f(v) + i\beta f(u) = \\ &= (\alpha + i\beta)[f(u) + if(v)] = \\ &= (\alpha + i\beta)f(u + iv), \end{aligned}$$

從而 f 成爲 E_1 上的綫性汎函數．如 f 又是 E 上連續的，則延拓後 f 也是 E_1 連續的，這也是容易看出的，因爲取 $U \in \mathfrak{U}$，使

$$x \in U \Longrightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

那末

$$x \in U_1 \equiv U + iU \Longrightarrow x = u + iv, \quad u, v \in U,$$

從而

$$|f(x)| \leqslant |f(u)| + |f(v)| < \varepsilon.$$

以上是不足道的。但我們下面考察另一問題，即如E是複拓撲綫性空間，而f是E上複值綫性泛函數，則f自然也是實齊性加法泛函數，即對於凡實數α，$f(\alpha x)=\alpha f(x)$。反之，E上實齊性加法泛函數是否一定是E上或可延拓成E上的複值綫性泛函數呢？下面的定理即解決這一問題。

定理 2. 設E是複拓撲綫性空間；設φ是E上一個複數值綫性連續泛函數，則必存在E上一個實值加法實齊性連續泛函數f，使$\varphi(x)=f(x)-if(x)$。反之，如f是E上實值連續加法實齊性泛函數，則$\varphi(x)\underset{df}{=}f(x)-if(ix)$是$E$上一個複值連續綫性泛函數。

證．1) 設φ是E上複值綫性連續泛函數，則可寫成$\varphi(x)=f(x)+ig(x)$；其中$f(x)$，$g(x)$都是實值泛函數．一方面$\varphi(ix)=f(ix)+ig(ix)$，另一方面，$i\varphi(x)=if(x)-g(x)$，所以$f(ix)=-g(x)$，$g(ix)=f(x)$，並且這兩式是同效的。所以$\varphi(x)=f(x)-if(ix)$。如α，β是實數，則比較$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$的實數部分可以看出，$f$是加法實齊性的。$f$的連續性是$\varphi$的連續性的直接結果．

2) 設f是E上實值連續加法實齊性泛函數，定義$\varphi(x)=f(x)-if(ix)$，則$\varphi(x+y)=f(x+y)-if(i(x+y))=f(x)+f(y)-i[f(ix)+f(iy)]=\varphi(x)+\varphi(y)$，而

$$\varphi(ix)=f(ix)-if(-x)=if(x)+f(ix)=i\varphi(x).$$

φ的連續性乃是f的連續性的直接結果。從而依§2定理10系，φ是E上綫性連續泛函數。

註．設f如定理2所述，依§2定理1，如$\{\|x\|_d\}$表定義E的拓撲結構的一族偽範數，則存在正數$\mu>0$，使對每個x，

$$|f(x)|\leqslant\mu\|x\|_d.$$

令$\|f\|_d$表滿足上式的μ的最大下界；同様我們令$\|\varphi\|_d$表滿足

$$|\varphi(x)|\leqslant\mu\|x\|_d$$

的諸正數μ的最大下界。我們證明對每個偽範數$\|x\|_d$，

$$\|\varphi\|_d=\|f\|_d.$$

事實上，對任意$y\in E$，恆可取$\vartheta\in[0,2\pi]$，使

$$f(ie^{i\vartheta}y)=\cos\vartheta\, f(iy)-\sin\vartheta\, f(y)=0,$$

即 $\tan\vartheta=\dfrac{f(iy)}{f(y)}$. 所以

$$|\varphi(y)|=|e^{i\vartheta}\varphi(y)|=|\varphi(e^{i\vartheta}y)|=|f(e^{i\vartheta}y)|\leqslant$$
$$\leqslant\|f\|_d\|e^{i\vartheta}y\|_d=\|f\|_d\|y\|_d,$$

從而 $\|\varphi\|_d\leqslant\|f\|_d$. 另一方面，由於 $\|f\|_d$ 的定義，可取 $x_n\in E$, 使 $\|x_n\|_d=1$, 而 $|f(x_n)|\to\|f\|_d$ (因爲 $\|f\|_d=\inf\left\{\mu\,\middle|\,\mu\geqslant\dfrac{|f(x)|}{\|x\|_d}\text{ 一切 } x\right\}=$ $=\sup\limits_{x\in E}\dfrac{|f(x)|}{\|x\|_d}=\sup\limits_{\|x\|_d=1}|f(x)|$). 所以 $|\varphi(x_n)|=\sqrt{[f(x_n)]^2+[f(ix_n)]^2}\geqslant$ $\geqslant|f(x_n)|$, 從而對 $\epsilon>0$, 可取 n_0, 使 $n>n_0\Longrightarrow|\varphi(x_n)|>\|f\|_d-\epsilon$, $\|x_n\|_d=1$, 於是 $\|\varphi\|_d=\|f\|_d$.

§4. 非零綫性汎函數的存在問題

首先考察子空間上綫性汎函數延拓到整個空間的問題.

定理 1 (Hahn-Banach). 設 E 是實(複)局部凸拓撲綫性空間，f_0 是定義在 E 的一個綫性子空間 A 上的實(複)值連續加法實齊性(綫性)汎函數，那末必存在定義於整個 E 上的一個實(複)值連續加法實齊性綫性汎函數 f, 使當 $x\in A$ 時，$f(x)=f_0(x)$. 如果存在 $d\in D$, 實數 M, 使 $|f_0(x)|\leqslant M\|x\|_d\,(x\in A)$, 那末對於一切 $x\in E$ 也必有

$$|f(x)|\leqslant M\|x\|_d.$$

證. 1) 首先考察 K 是實數域的情形. 如果 $f_0=\Theta$, 定理不足道. 設 $f_0\neq\Theta$, 必存在有界集 $B\subset E$, 使

$$\|f_0\|_B=\sup_{x\in B}|f_0(x)|\neq 0.$$

既然 f_0 是連續的，必存在 $d\in D$ (D 表示定義 E 的拓撲結構的定向集)及正數 μ, 使對於一切 $x\in E$, $|f_0(x)|\leqslant\mu\|x\|_d$. 令 $p(x)=\mu\|x\|_d$, $p(x)$ 是一個凸汎函數，依平常的 Hahn-Banach 定理[1], 可以把 $f(x)$ 延拓成 E 上一個實加法實齊性汎函數 $f(x)$, 使 $|f(x)|\leqslant\mu\|x\|_d\,(x\in E)$. 於是 f 也是連續的.

1) 見於一般汎函分析書中，這裏從略；參看關肇直的"汎函分析講義".

2) 設 K 是複數域的情形．依前節的結果，可以寫成

$$f_0(x)=f_1(x)-if_1(ix),$$

f_1 是定義在 A(看作實綫性空間)上的連續加法實齊性汎函數．依證明1)可知存在定義於整個 E 上的連續實齊性加法汎函數 φ，使 $x\in A\Longrightarrow$ $\Longrightarrow\varphi(x)=f_1(x)$．令

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)\,(x\in E),$$

於是 f 是 E 上一個複值連續綫性汎函數，並且

$$x\in A\Longrightarrow f(x)=f_0(x).$$

對於任意 $x\in E$，設 $f(x)=\rho e^{i\vartheta}$，ρ，ϑ 是實數($\rho\geqslant 0$)，那末

$$|f(x)|=e^{-i\vartheta}f(x)=f(e^{-i\vartheta}x),$$

但這時，$f(e^{-i\vartheta}x)$是實數，從而 $=f_1(e^{-i\vartheta}x)$，因為後者是 $f(e^{-i\vartheta}x)$ 的實數部分．於是

$$|f(x)|=f_1(e^{-i\vartheta}x)\leqslant M\|e^{-i\vartheta}x\|_d=M\|x\|_d.$$

定理 5 (LaSalle)．為了數域 K 上的拓撲綫性空間 E 上有一個非零綫性汎函數存在，必須且只須 E 包含一個不等於 E 自己的不空開凸集．

證．1) 必要性．設 f 是 E 上一個非零綫性汎函數．令

$$A\equiv\left\{x\,\middle|\,x\in E,\ |f(x)|<1\right\},$$

那末 $\Theta\in A$，並且由於 f 的連續性可知 A 是開集．設

$$|f(x)|<1,\ |f(y)|<1,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$

那末

$$|f(\lambda x+(1-\lambda)y)|\leqslant\lambda|f(x)|+(1-\lambda)|f(y)|<1,$$

從而 A 是凸集．既然 f 不恆等於零，存在 $x_0\in E$，使 $f(x_0)\neq 0$，於是

$$f\left(\frac{2x_0}{f(x_0)}\right)=2,$$

從而 $2x_0/f(x_0)\notin A$，即 $A\subsetneqq E$．

2) 充分性．設 A 是 E 中一個不空開凸集，$A\subsetneqq E$．無妨設 $A\ni\Theta$，因無論如何，$A\neq\phi$；令 $a\in A$，用 $A-a$ 代 A 就得出一個含 Θ 的不空開凸集來．又無妨設 A 是均衡的，否則可以考察(仿 §1 定理 4 的證)

$$B=\bigcap\left\{\lambda A\,\middle|\,\lambda\in K,\ |\lambda|=1\right\},$$

那末B也是凸集，且$B\ni\Theta$. 依§1定理1，必存在Θ的鄰域V，使

$$|\alpha|\leqslant 1\Longrightarrow \alpha V\subset A.$$

特別，當$|\lambda|=1$時，$V\subset\lambda A$，從而$V\subset B$. 必要時用B代替A，無妨設A便是一個不等於E的含Θ的一鄰域V的均衡凸集. 依§1定理1，且因$V\subset A$，對於每個$x\in E$，存在數$\alpha\in K$，使$x\in\alpha A$. 今定義

$$\|x\|_A=\inf\{|\alpha|\,|\,x\in\alpha A\}, \tag{1}$$

$\|x\|_A$是定義在E上的非負值汎函數，並且$\|\Theta\|_A=0$. 不難看作，

$$\|\alpha x\|_A=|\alpha|\,\|x\|_A.$$

考察$\|x+y\|_A$, $x,y\in E$. 由(1)，對於每個$\varepsilon>0$，可取數λ, μ，使

$$0<|\lambda|<\|x\|_A+\frac{\varepsilon}{2},\quad 0<|\mu|<\|y\|_A+\frac{\varepsilon}{2},$$

而

$$x\in\lambda A,\quad y\in\mu A.$$

A既是均衡的，$\dfrac{x}{|\lambda|}\in A$, $\dfrac{y}{|\mu|}\in A$. 從而，因A是凸集，

$$\frac{x+y}{|\lambda|+|\mu|}=\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}\cdot\frac{x}{|\lambda|}+\frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}\cdot\frac{y}{|\mu|}\in A,$$

即

$$\|x+y\|_A\leqslant|\lambda|+|\mu|<\|x\|_A+\|y\|_A+\varepsilon.$$

$\varepsilon>0$既是任意的，可知

$$\|x+y\|_A\leqslant\|x\|_A+\|y\|_A,$$

於是$\|x\|_A$是凸汎函數. 這個汎函數$\|x\|_A$不恆等於0. 事實上，依假定，$\exists x_0\in E$, $x_0\notin A$. 設存在μ, $0<|\mu|<1$，使$x_0\in\mu A$. 由A的均衡性可知$x_0\in|\mu|A$. 又因$\Theta\in A$，依A的凸性可知

$$x_0=(1-|\mu|)\Theta+|\mu|\frac{x_0}{|\mu|}\in A,$$

得出矛盾. 特別$0<|\mu|<1\Longrightarrow x_0\notin\mu A$，即$\|x_0\|_A\neq 0$.

於是依平常 Hahn-Banach 定理，E上有一實值加法實齊性汎函數$f(x)$，使對於每個$x\in E$，$f(x)\leqslant\|x\|_A$，並且$f(x_0)=\|x_0\|_A\neq 0$.

於是

$$-f(x)=f(-x)\leqslant\|x\|_A=\|x\|_A,$$

從而

$$|f(x)|\leqslant\|x\|_A\ (x\in E).$$

$\|x\|_A$ 可以看成是定義 E 的僞範數族中的一個(§1 定理 2 之證), 由此可知 f 是連續的. 當 K 是實數域的情形,證明已完.

今考複數域 K 的情形. 利用如上構成的汎函數 f,

$$\varphi(x)\equiv f(x)-if(ix)$$

是 E 上一個複值綫性汎函數,並且

$$\varphi(x_0)=\|x_0\|_A-if(ix_0)\neq 0,$$

因爲它的實數部分 $\|x_0\|_A\neq 0$. 證完.

系. 如果 E 是局部凸拓撲綫性空間, 那末對於每個 $x_0\in E$ 及每個 $d\in D$ (D 是相應於 E 的拓撲結構的定義擬範數族的定向集),必存在 E 上一個綫性汎函數 $f(x)$,使 $f(x_0)=\|x_0\|_d$.

證. 只須在上述定理的證明中、用 $\|x\|_d$ 代替 $\|x\|_A$. 由於 E 是局部凸的, $\|x\|_d$ 都是擬範數,從而那裏的證明適用. 於是首先得出一個定義在 E 上的實值實齊性連續加法汎函數 f, 使

$$f(x_0)=\|x_0\|_d.$$

事實上,可以進一步要求

$$f_1(\alpha x_0)=\alpha\|x_0\|_d\ (\alpha\text{ 是實數}),\ f(ix_0)=0.$$

這個 f_1 是定義在綫性子空間 $\left\{\alpha x_0\middle|\alpha\in K\right\}$ 上的實值加法齊次連續汎函數. 先把 f_1 延拓成整個 E 上的連續實值加法實齊性汎函數,使

$$|f(x)|\leqslant\|x\|_d,\ f(x_0)=\|x_0\|_d\ (x\in E).$$

然後令

$$\varphi(x)=f(x)-if(ix)\ (x\in E),$$

得出 E 上一個複值綫性汎函數 $\varphi(x)$, 而

$$\varphi(x_0)=f(x_0)-if(ix_0)=f(x_0)=\|x_0\|_d.$$

證完.

§5. 距 離 化 問 題

在歷史上, 拓撲結構由距離乃至由範數決定的那種綫性空間的研

究是更早的．現在考察一般拓撲綫性空間可賦距離與可賦範的條件．

定義 1． 拓撲綫性空間 E 叫做可賦距離的，是指它的拓撲結構由一個距離決定． E 叫做可賦準範的，是指它的拓撲結構可以由一個不變距離決定：

$$\rho(x, y) = \rho(x - y, \Theta), (x, y \in E).$$

這時 $\|x\| \equiv \rho(x, \Theta)$ 叫做 E 上的準範數．如果 E 上賦有準範數，並且按由這個準範數 $\|x\|$ 引起的距離 $\rho(x, y) \equiv \|x - y\|$ 是完備的，E 就叫做 Fréchet 型空間[1]．

由拓撲羣的距離化定理(角谷靜夫)立刻推出下列定理，因爲拓撲綫性空間正是一個加法交換拓撲羣．

定理 1． 爲了拓撲綫性空間 E 是可賦距離的，必須且只須它的零元有一可數的基本鄰域組．

註．實際上，E 可僅是可賦距離的，而且是可賦準範的．

同樣，由拓撲羣的相應定理，立刻得出

定理 2． 完備的可賦距離拓撲綫性空間必可改賦一拓撲等價的距離，使這距離是不變的並且這空間按它成爲 Fréchet 空間．

例．$S[0, 1]$，$C(\Omega)$等都是可賦距離的(都是 Fréchet 型的)，但 §1定義 1 下例 1 的空間 $\mathfrak{f}(\Omega)$當 Ω 是無窮集時是不可賦距離的．

定義 2． 拓撲綫性空間 E 叫做局部有界的，是指其中包含一個不空有界開集．

註．設拓撲綫性空間 E 包含一個不空開有界集 G，無妨設 G 包含 Θ，因爲只須用一位移 $G \to G - a$ $(a \in G)$ 就可把 G 變成含 Θ 的有界開集(§1 定理 6)．又如果 G 是不空開有界集，而 $\alpha \neq 0$，$\alpha \in K$，那末 αG 也是不空開有界集．設 U 是 Θ 的任意鄰域，依有界集的定義，存在數 $\alpha \in$ $\in K$，使 $G \subset \alpha U$，即 $\frac{1}{\alpha} G \subset U$．但對於 Θ 的任意鄰域 V，可取 Θ 的鄰域 U，

[1] 我們這裏的 Fréchet 空間，是按早期文獻中的命名的(見例如 Banach, S.: Théorie des opérations linéaires)．Bourbaki, N. 則管局部凸的 Fréchet 空間叫做 Fréchet 空間，波蘭學派稱它做(B_0)型空間．

使

$$|\lambda|\leqslant 1\Longrightarrow \lambda U\subset V.$$

又對於每個 $\alpha\neq 0$，可取自然數 n，使 $\frac{1}{n}<\frac{1}{|\alpha|}$。於是可取 n，使 $\frac{1}{n}G\subset$ $\subset V$，即 $\left(\frac{1}{n}G\right)_{n=1,2,\cdots}$ 成爲 Θ 的基本鄰域組.

於是可知局部有界的拓撲綫性空間必是可賦距離的.

下面可賦範性條件是有趣的.

定理 3(А. Н. Колмогоров). 爲了拓撲綫性空間 E 是可賦範的，必須且只須 E 中有一不空的開凸有界集.

證. 1) 必要性. 設 E 是可賦範的，令 $\|x\|$ 表示它上面的範數. 令 $U_1=\left\{x\,\middle|\,\|x\|<1\right\}$，$U_1$ 必是有界集，因爲對於 Θ 的任意鄰域 V，必存在正數 α，使 $\|x\|<\alpha\Longrightarrow x\in V$（範數決定的拓撲結構與原來的拓撲結構等價），從而 $\alpha U_1\subset V$. 又因 $x\in U_1\Longrightarrow\|x\|<1$，從而 $\|y-x\|<$ $<1-\|x\|\Longrightarrow\|y\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|<1$，即

$$x\in U_1\Longrightarrow x+U_{1-\|x\|}\subset U_1,$$

即 U_1 是開集. 又 $x,y\in U_1$, $0<\alpha<1\Longrightarrow\|\alpha x+(1-\alpha)y\|\leqslant\alpha\|x\|+$ $+(1-\alpha)\|y\|<1$，所以 U_1 是凸集. 因 $\Theta\in U_1$，U_1 是不空的.

2) 充分性. 設 G 是拓撲綫性空間 E 中一個不空開凸有界集，無妨設 $G\ni\Theta$. 依前節定理 5 的證，存在均衡凸集 $U\subset G$，使 $U\in\mathfrak{B}(\Theta)$（但 U 不必是開集!）. 既然 G 有界，依上述，$\left(\frac{1}{n}G\right)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是 Θ 的基本鄰域組，從而 $\left(\frac{1}{n}U\right)_{n=1,2,\cdots}$ 也是 Θ 的基本鄰域組. 令

$$\|x\|=\inf\left\{|\alpha|\,\middle|\,x\in\alpha U\right\},$$

那末由 U 的均衡性可知

$$x\in\alpha U\Longleftrightarrow x\in|\alpha|\in U,$$

從而

$$\|x\|=\inf\left\{\alpha\,\middle|\,x\in\alpha U,\ \alpha>0\right\}.$$

$\|x\|=0\Longleftrightarrow x=\Theta$ 與 $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$ 是顯然的. 而如 $\varepsilon>0$，可取

$\eta_1, \eta_2 > 0$，使 $\eta_1, \eta_2 < \frac{\varepsilon}{2}$，而 $x \in (\|x\| + \eta_1)U$，$y \in (\|y\| + \eta_2)U$．從而由 U 的凸性可得

$$\frac{x+y}{\|x\|+\|y\|+\eta_1+\eta_2} = \frac{\|x\|+\eta_1}{\|x\|+\|y\|+\eta_1+\eta_2} \cdot \frac{x}{\|x\|+\eta_1} + \frac{\|y\|+\eta_2}{\|x\|+\|y\|+\eta_1+\eta_2} \cdot \frac{y}{\|y\|+\eta_2} \in U.$$

於是

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|+\eta_1+\eta_2 < \|x\|+\|y\|+\varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ 既是任意的，所以 $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$. 注意

$$x \in \alpha U\ (\alpha > 0) \Longrightarrow \|x\| < \alpha.$$

考察 $\frac{1}{n_0}U$. $\frac{1}{n_0}U$ 既是 Θ 的鄰域，可取 $V \in \mathfrak{V}(\Theta)$，使

$$|\alpha| < 1 \Longrightarrow \alpha V \subset \frac{1}{n_0}U.$$

又因 $\left(\frac{1}{n}U\right)(n = 1, 2, \cdots)$ 是 Θ 的基本鄰域組，必存在 n_1，使

$$\frac{1}{n_1}U \subset V.$$

於是

$$\|x\| < \frac{1}{n_1} \Longrightarrow \exists\, \beta,\ 0 < \beta < \frac{1}{n_1},\ 使\ x \in \beta U,$$

從而

$$x \in n_1\beta \cdot \frac{1}{n_1}U \subset n_1\beta V \subset \frac{1}{n_0}U,$$

因爲 $n_1\beta < 1$. 於是由 $\|x\|$ 定義的拓撲結構就是原來的拓撲結構.